

因式分解提高训练（八下）

一、分解因式要点回顾：把一个多项式分解成几个整式之积的形式叫做多项式的因式分解。因式分解是多项式乘法的逆向变形。 步骤：一、提 二、套 三、十字 四、分组 五、查

分解因式过程中应注意的几个问题：

(1) 分解因式总是在指定的数集中进行，不作特别的说明，一般指实数范围内进行；

(2) 分解因式的结果是几个整式积的形式，而每一个因式都应分解到不能分解为止；

(3) 在提取公因式时，要防止出现提取不尽、提取全项后，得该项为零、提取系数为负的因式疏忽变号等错误；

(4) 运用公式法应当注意，当平方项不是一个字母或数时，可用“换元法”进行分解因式。

常用公式：

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) ;$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 ;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) ;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 ;$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) ;$$

$$a^n - b^n = \begin{cases} (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) & (n \text{ 为正整数}) \\ (a + b)(a^{n-1} + a^{n-2}b - a^{n-3}b^2 + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \text{ 为奇数})$$

二、基础练习：

1. 将下列各式分解因式：

(1) $ax - 3by - 3ay + bx$; (2) $3x^2 + 13x - 10$; (3) $\frac{1}{16}a^3b - \frac{3}{2}a^2b^2 + 9ab^3$;

(4) $x^6 - y^6$; (5) $x - y - x^2 + 2xy - y^2 + 2$; (6) $2a^2 - 5ab - 3b^2 + a + 11b - 6$;

(7) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3$ 。

2. 已知 $x=y+1$ ，求多项式 $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3y + 2$ 的值。

3. 求证：两个连续奇数的平方差一定是8的倍数。

4. 求证： $5^{23} - 5^{21}$ 能被120整除。

5、计算：(1) $(1 - \frac{1}{11^2})(1 - \frac{1}{12^2})(1 - \frac{1}{13^2})$;

(2) $(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$;

(3) $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$;

(4) $\frac{2004^3 - 2 \times 2004^2 - 2002}{2004^3 + 2004^2 - 2005}$ 。

三、新方法探究：

1、配方法：配方法是二次三项式进行因式分解的重要方法。配方法的基本步

骤是①二次三项式的二次项系数化为一，②加上并减去一次项系数一半的平方。

例1、把下列各式分解因式： $x^2 - 2x - 3$

练习：(1) $m^4 + m^2n^2 + n^4$ ；(2) $2y^2 + y - 1$ 。

(3) 若 $\triangle ABC$ 的三条边 a, b, c ，满足 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ ，试判断 $\triangle ABC$ 的形状。

2、拆项、添项法

因式分解是多项式乘法的逆运算。在多项式乘法运算时，整理、化简常将几个同类项合并为一项，或将两个仅符号相反的同类项相互抵消为零。在对某些多项式分解因式时，需要恢复那些被合并或相互抵消的项，即把多项式中的某一项拆成两项或多项，或者在多项式中添上两个仅符合相反的项，前者称为拆项，后者称为添项。拆项、添项的目的是使多项式能用分组分解法进行因式分解。

例4 分解因式： $x^3 - 9x + 8$ 。

分析 本题解法很多，这里只介绍运用拆项、添项法分解的几种解法，注意一下拆项、添项的目的与技巧。

解法1 将常数项8拆成-1+9。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x^3 - 9x - 1 + 9 \\ &= (x^3 - 1) - 9x + 9 \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1) - 9(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 + x - 8). \end{aligned}$$

解法2 将一次项-9x拆成-x-8x。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x^3 - x - 8x + 8 \\ &= (x^3 - x) + (-8x + 8) \\ &= x(x+1)(x-1) - 8(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 + x - 8). \end{aligned}$$

解法3 将三次项 x^3 拆成 $9x^3 - 8x^3$ 。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 9x^3 - 8x^3 - 9x + 8 \\ &= (9x^3 - 9x) + (-8x^3 + 8) \\ &= 9x(x+1)(x-1) - 8(x-1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x-1)(x^2 + x - 8). \end{aligned}$$

解法4 添加两项 $-x^2 + x^2$ 。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x^3 - 9x + 8 \\ &= x^3 - x^2 + x^2 - 9x + 8 \\ &= x^2(x-1) + (x-8)(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 + x - 8). \end{aligned}$$

说明 由此题可以看出，用拆项、添项的方法分解因式时，要拆哪些项，添什么项并无一定之规，主要的是要依靠对题目特点的观察，灵活变换，因此拆项、添项法是因式分解诸方法中技巧性最强的一种。

练习：分解因式：

- (1) $x^9 + x^6 + x^3 - 3$;
- (2) $(m^2 - 1)(n^2 - 1) + 4mn$;
- (3) $(x+1)^4 + (x^2 - 1)^2 + (x-1)^4$;
- (4) $a^3b - ab^3 + a^2 + b^2 + 1$.

解 (1)将-3拆成-1-1-1.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= x^9 + x^6 + x^3 - 1 - 1 - 1 \\
 &= (x^9 - 1) + (x^6 - 1) + (x^3 - 1) \\
 &= (x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) + (x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^3 - 1) \\
 &= (x^3 - 1)(x^6 + 2x^3 + 3) \\
 &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + 2x^3 + 3).
 \end{aligned}$$

(2) 将 $4mn$ 拆成 $2mn + 2mn$.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (m^2 - 1)(n^2 - 1) + 2mn + 2mn \\
 &= m^2n^2 - m^2 - n^2 + 1 + 2mn + 2mn \\
 &= (m^2n^2 + 2mn + 1) - (m^2 - 2mn + n^2) \\
 &= (mn + 1)^2 - (m - n)^2 \\
 &= (mn + m - n + 1)(mn - m + n + 1).
 \end{aligned}$$

(3) 将 $(x^2 - 1)^2$ 拆成 $2(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)^2$.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (x + 1)^4 + 2(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)^2 + (x - 1)^4 \\
 &= [(x + 1)^4 + 2(x + 1)^2(x - 1)^2 + (x - 1)^4] - (x^2 - 1)^2 \\
 &= [(x + 1)^2 + (x - 1)^2]^2 - (x^2 - 1)^2 \\
 &= (2x^2 + 2)^2 - (x^2 - 1)^2 = (3x^2 + 1)(x^2 + 3).
 \end{aligned}$$

(4) 添加两项 $+ab - ab$.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= a^3b - ab^3 + a^2 + b^2 + 1 + ab - ab \\
 &= (a^3b - ab^3) + (a^2 - ab) + (ab + b^2 + 1) \\
 &= ab(a + b)(a - b) + a(a - b) + (ab + b^2 + 1) \\
 &= a(a - b)[b(a + b) + 1] + (ab + b^2 + 1) \\
 &= [a(a - b) + 1](ab + b^2 + 1) \\
 &= (a^2 - ab + 1)(b^2 + ab + 1).
 \end{aligned}$$

说明 (4) 是一道较难的题目，由于分解后的因式结构较复杂，所以不易想到添加 $+ab - ab$ ，而且添加项后分成的三项组又无公因式，而是先将前两组分解，再与第三组结合，找到公因式。这道题目使我们体会到拆项、添项法的极强技巧所在，同学们需多做练习，积累经验。

3、双十字相乘法

例 1: $x^2 - 3xy - 10y^2 + x + 9y - 2$

例 2: $xy + y^2 + x - y - 2$

点拨: 运用双十字相乘法对 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ 型的多项式分解因式的

步骤: (1) 用双十字相乘法分解前三项组成的二次三项式;

(2) 在这个十字相乘的图右边再画一个“十字”，把常数项分解为两个因数，填在第二个十字的右边，使得这两个因数在第二个十字中交叉之积的和，等于原式中含 y 的一次项的系数 E ，同时还必须使得与第一个十字中左列的两个因数交叉相乘的积的和，等于原式中含 x 的一次项系数 D 。

练习:

(1) $x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + 5y + 3$

$$(2) 3x^2 - 5xy + 2y^2 + 10x - 7y + 3$$

2、换元法：

例 3： $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$

例 4： $(x - 2)(x + 2)(x + 4)x + 12$

练习：(1) 把 $(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x + 4) - 16$ 分解因式。

(2) 分解因式 $(a + b)^2 + 2(a + b)(a - b) - 15(a - b)^2$ 。

(3) 分解因式 $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 48$

4、待定系数法：

即先假定一个含有待定系数的恒等式，然后根据各项恒等的性质，列出几个含有待确定系数的方程组，解之求得待定系数的值；或者从方程组中消去这些待定系数，求出原来那些已知系数间所存在的关系，从而解决问题。

例 5： 分解因式 $x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3$

点拨： 利用待定系数法分解因式的数学思想是方程思想，其求解关键在利用相等多项式对应项系数相等的性质建立方程组，求出相关的待定系数的值。

练习 (1)：因式分解 $2x^2 + 3xy - 9y^2 + 14x - 3y + 20$

(2) 因式分解 $4x^2 + 4xy - 3y^2 - 4x - 10y - 3$

四、经典题型探究：

1、恒等变形：

(1) 求证：不论 x 和 y 为何值，代数式 $x^2y^2 - 4xy + 5$ 总为正值。

(2) 已知 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 0$ ，求 x 、 y 。

(3) 若 $x^2 - 5xy + 6y^2 = (x + my)(x + ny)$ ，求 m 、 n 。

(4) 若 $\triangle ABC$ 的三边 a ， b ， c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ ，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由。

2、用形如 $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ 式解题

例 6： 如果 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，求 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ 的值

例 7： 已知 $\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{5}$ ，求 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ 的值

练习 1: 已知 $\frac{x}{x^2-x+1} = 7$, 求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值

练习 2: 已知 $\frac{x}{x^2-mx+1} = 1$, 求 $\frac{x^3}{x^6-m^3x^3+1}$ 的值

五、达标训练:

4、化简求值

$$(1) \frac{a^2+3a}{a^2+3a+2} \div \frac{a+3}{a+1} - \frac{2}{a+2}, \text{ 其中 } a = \sqrt{3}$$

$$(2) \left(\frac{x^2+2x}{x^2-4} - \frac{3x+1}{x-2} \right) \div \frac{x+2}{x-2} \text{ 其中 } x = \frac{3}{2}$$

5、已知 $|a-4| + \sqrt{b-9} = 0$, 计算 $\frac{a^2+ab}{b^2} \cdot \frac{a^2-ab}{a^2-b^2}$ 的值

6、求证: 四个连续整数的积加上 1 的和, 一定是整数的平方。

7、已知 $x^2+y^2-4x+4=0$, 求 $xy+2x-y-2$ 的值。

8、已知 $x^2-3x+k=(x+p)(x+q)$, 其中 k, p, q 均为整数, 且 $|k| \leq 10$, k 可能取哪些值? 可取哪些值?

9、 $a^2+ma+18$ 在整数范围内可分解成两个一次因式的乘积, 且 m 是整数, 则 m 可取哪些值?

10. 求证: 多项式 $(x^2-4)(x^2-10x+21)+100$ 的值一定是非负数。

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 三边 a, b, c 满足 $a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc=0$, 求证: $a+c=2b$ 。

12. 已知: a, b, c 是非零实数, 且 $a^2+b^2+c^2=1$, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$,

求 $a+b+c$ 的值。