

成都市 2014 级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

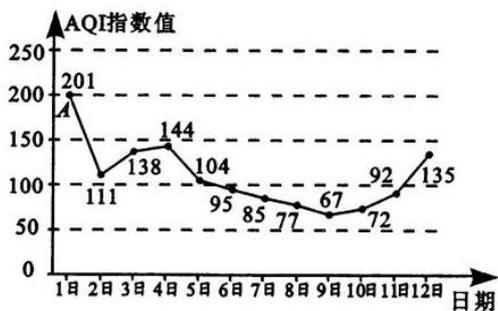
注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷(选择题,共 60 分)

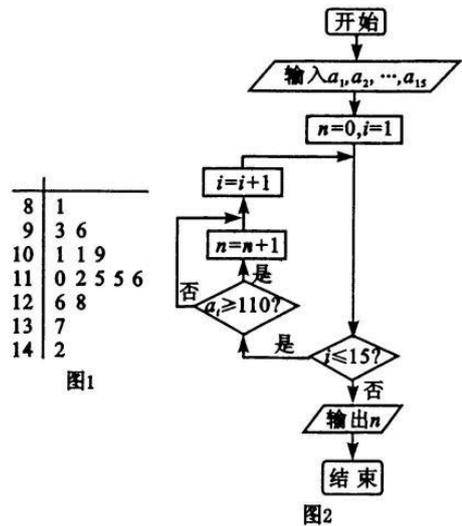
一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

- (1) 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{x | (x + 2)(x - 1) < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cup B =$
(A) $\{-2, -1, 0, 1\}$ (B) $\{-1, 0, 1\}$
(C) $\{0, 1\}$ (D) $\{0\}$
- (2) 已知复数 $z_1 = 2 + 6i$, $z_2 = -2i$. 若 z_1, z_2 在复平面内对应的点分别为 A, B , 线段 AB 的中点 C 对应的复数为 z , 则 $|z| =$
(A) $\sqrt{5}$ (B) 5 (C) $2\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{17}$
- (3) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 公比 $q = 2$. 若 $a_m = a_1 a_2 a_3 a_4 (m \in \mathbf{N}^*)$, 则 $m =$
(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8
- (4) AQI 是表示空气质量的指数, AQI 指数值越小, 表明空气质量越好, 当 AQI 指数值不大于 100 时称空气质量为“优良”. 如图是某地 4 月 1 日到 12 日 AQI 指数值的统计数据, 图中点 A 表示 4 月 1 日的 AQI 指数值为 201. 则下列叙述不正确的是
(A) 这 12 天中有 6 天空气质量为“优良”
(B) 这 12 天中空气质量最好的是 4 月 9 日
(C) 这 12 天的 AQI 指数值的中位数是 90
(D) 从 4 日到 9 日, 空气质量越来越好
- (5) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 直线 $l: y = 2x - 2$. 若直线 l 平行于双曲线 C 的一条渐近线且经过 C 的一个顶点, 则双曲线 C 的焦点到渐近线的距离为
(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) 4



(6) 高三某班 15 名学生一次模拟考试成绩用茎叶图表示如图 1. 执行图 2 所示的程序框图, 若输入的 $a_i (i = 1, 2, \dots, 15)$ 分别为这 15 名学生的考试成绩, 则输出的结果为

- (A) 6 (B) 7
(C) 8 (D) 9

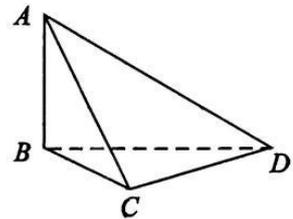


(7) 已知 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$, B 是曲线 $y = \sin x$ 与 x 轴围成的封闭区域. 若向区域 A 内随机投入一点 M , 则点 M 落入区域 B 的概率为

- (A) $\frac{2}{\pi}$ (B) $\frac{4}{\pi}$
(C) $\frac{2}{\pi^3}$ (D) $\frac{4}{\pi^3}$

(8) 在我国古代数学名著《九章算术》中, 将四个面都为直角三角形的四面体称为鳖臑. 如图, 在鳖臑 $ABCD$ 中, $AB \perp$ 平面 BCD , 且 $AB = BC = CD$, 则异面直线 AC 与 BD 所成角的余弦值为

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



(9) 已知抛物线 $C: y^2 = mx (m > 0)$ 的焦点为 F , 点 $A(0, -\sqrt{3})$. 若射线 FA 与抛物线 C 相交于点 M , 与其准线相交于点 D , 且 $|FM| : |MD| = 1 : 2$, 则点 M 的纵坐标为

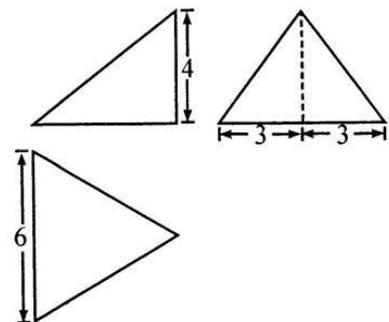
- (A) $-\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $-\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(10) 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 2x - 2$. 给出下列命题: ① $\exists \beta \in \mathbf{R}$, $f(x + \beta)$ 为奇函数; ② $\exists \alpha \in (0, \frac{3\pi}{4})$, $f(x) = f(x + 2\alpha)$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立; ③ $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 若 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{4}$; ④ $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 若 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 则 $x_1 - x_2 = k\pi (k \in \mathbf{Z})$. 其中的真命题有

- (A) ①② (B) ③④ (C) ②③ (D) ①④

(11) 如图, 某三棱锥的正视图、侧视图和俯视图分别是直角三角形、等腰三角形和等边三角形. 若该三棱锥的顶点都在同一个球面上, 则该球的表面积为

- (A) 27π (B) 48π
(C) 64π (D) 81π



(12) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_{m-1} = 13$, $S_m = 0$, $S_{m+1} = -15$, 其中 $m \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \geq 2$. 则数列

$\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和的最大值为

- (A) $\frac{24}{143}$ (B) $\frac{1}{143}$ (C) $\frac{24}{13}$ (D) $\frac{6}{13}$

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

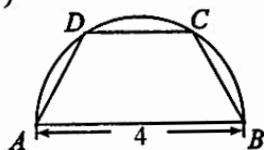
二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

(13) $(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中,常数项为_____.(用数字作答)

(14) 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$, 则 $z = 3x - y$ 的最小值为_____.

(15) 从甲、乙等 8 名志愿者中选 5 人参加周一到周五的社区服务,每天安排一人,每人只参加一天.若要求甲、乙两人至少选一人参加,且当甲、乙两人都参加时,他们参加社区服务的日期不相邻,那么不同的安排种数为_____.(用数字作答)

(16) 如图,将一块半径为 2 的半圆形纸板切割成等腰梯形的形状,下底 AB 是半圆的直径,上底 CD 的端点在半圆上,则所得梯形的最大面积为_____.



三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2c - a = 2b \cos A$.

(I) 求角 B 的大小;

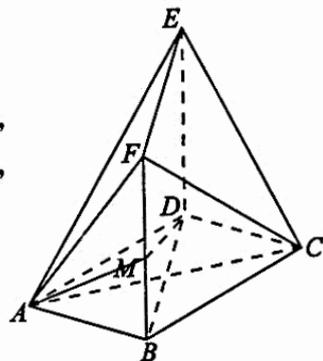
(II) 若 $b = 2\sqrt{3}$, 求 $a + c$ 的最大值.

(18)(本小题满分 12 分)

如图,在多面体 $ABCDEF$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, 四边形 $BDEF$ 是矩形,平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$, $DE = 2$. M 为线段 BF 上一点,且 $DM \perp$ 平面 ACE .

(I) 求 BM 的长;

(II) 求二面角 $A - DM - B$ 的余弦值的大小.



(19)(本小题满分 12 分)

几个月前,成都街头开始兴起“mobike”、“ofo”等共享单车,这样的共享单车为很多市民解决了最后一公里的出行难题.然而,这种模式也遇到了一些让人尴尬的问题,比如乱停乱放,或将共享单车占为“私有”等.

为此,某机构就是否支持发展共享单车随机调查了 50 人,他们年龄的分布及支持发展共享单车的人数统计如下表:

年龄	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)	[40, 45)
受访人数	5	6	15	9	10	5
支持发展共享单车人数	4	5	12	9	7	3

(I) 由以上统计数据填写下面的 2×2 列联表,并判断能否在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下,认为年龄与是否支持发展共享单车有关系;

	年龄低于 35 岁	年龄不低于 35 岁	合计
支持			
不支持			
合计			

(II) 若对年龄在 $[15, 20)$, $[20, 25)$ 的被调查人中各随机选取两人进行调查, 记选中的 4 人中支持发展共享单车的人数为 X , 求随机变量 X 的分布列及数学期望.

参考数据:

$P(K^2 \geq k)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

(20) (本小题满分 12 分)

已知圆 $C: (x+1)^2 + y^2 = 8$, 点 $A(1, 0)$, P 是圆 C 上任意一点, 线段 AP 的垂直平分线交 CP 于点 Q , 当点 P 在圆上运动时, 点 Q 的轨迹为曲线 E .

(I) 求曲线 E 的方程;

(II) 若直线 $l: y = kx + m$ 与曲线 E 相交于 M, N 两点, O 为坐标原点, 求 $\triangle MON$ 面积的最大值.

(21) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - 1, a \in \mathbf{R}$.

(I) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq \frac{1}{2}x - 1$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围;

(II) 设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 若 $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上存在极值, 求 a 的取值范围, 并判断极值的正负.

请考生在第(22)、(23)题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

(22) (本小题满分 10 分)

已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2$, 在以极点为直角坐标原点 O , 极轴为 x 轴的正半轴

建立的平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 3\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数).

(I) 写出直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(II) 在平面直角坐标系中, 设曲线 C 经过伸缩变换 $\varphi: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = y \end{cases}$ 得到曲线 C' , 若

$M(x, y)$ 为曲线 C' 上任意一点, 求点 M 到直线 l 的最小距离.

(23) (本小题满分 10 分)

已知 $f(x) = |x - a|, a \in \mathbf{R}$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) + |2x - 5| \geq 6$ 的解集;

(II) 若函数 $g(x) = f(x) - |x - 3|$ 的值域为 A , 且 $[-1, 2] \subseteq A$, 求 a 的取值范围.