

2017 高考新课标全国卷 3 理科数学试题答案解析

2017年普通高等学校招生全国统一考试（全国）

理科数学
（试题及答案解析）

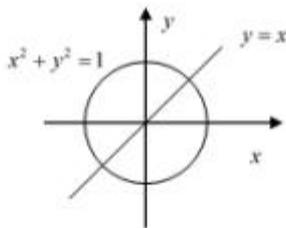
一、选择题：（本题共12小题，每小题5分，共60分）

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ ， $B = \{(x, y) | y = x\}$ ，则 $A \cap B$ 中元素的个数为（ ）

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

【答案】B

【解析】 A 表示圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上所有点的集合， B 表示直线 $y = x$ 上所有点的集合，故 $A \cap B$ 表示两直线与圆的交点，由图可知交点的个数为2，即 $A \cap B$ 元素的个数为2，故选B.



2. 设复数 z 满足 $(1+i)z = 2i$ ，则 $|z| =$ （ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

【答案】C

【解析】由题， $z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i+2}{2} = i+1$ ，则 $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ，故选C.

3. 某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了2014年1月至2016年12月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，绘制了下面的折线图.



根据该折线图，下列结论错误的是（ ）

- A. 月接待游客量逐月增加
 B. 年接待游客量逐年增加
 C. 各年的月接待游客量高峰期大致在7，8月
 D. 各年1月至6月的月接待游客量相对于7月至12月，波动性更小，变化比较平稳

【答案】A

【解析】由题图可知，2014年8月到9月的月接待游客量在减少，则A选项错误，故选A.

4. $(x+y)(2x-y)^2$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为（ ）

- A. -80 B. -40 C. 40 D. 80

【答案】C

【解析】由二项式定理可得，原式展开中含 x^3y^3 的项为

$$x \cdot C_2^1(2x)^2(-y)^1 + y \cdot C_2^2(2x)^0(-y)^2 = 40x^3y^3, \text{ 则 } x^3y^3 \text{ 的系数为 } 40, \text{ 故选C.}$$

5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ ，且与椭圆

$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 有公共焦点，则C的方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{10} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

【答案】B

【解析】∵双曲线的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ ，则 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ①

又∵椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 与双曲线有公共焦点，易知 $c = 3$ ，则 $a^2 + b^2 = c^2 = 9$ ②

由①②解得 $a = 2, b = \sqrt{5}$ ，则双曲线C的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ ，故选B.

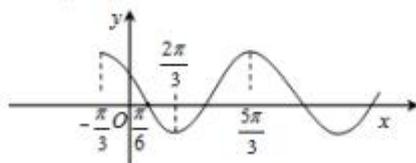
6. 设函数 $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ ，则下列结论错误的是 ()

- A. $f(x)$ 的一个周期为 -2π B. $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{8\pi}{3}$ 对称
C. $f(x + \pi)$ 的一个零点为 $x = \frac{\pi}{6}$ D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递减

【答案】D

【解析】函数 $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ 的图像可由 $y = \cos x$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到，

如图可知， $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上先递减后递增，D选项错误，故选D.



7. 执行右图的程序框图，为使输出 S 的值小于 91，则输入的正整数 N 的最小值为 ()

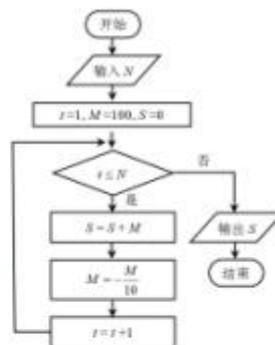
- A. 5
B. 4
C. 3
D. 2

【答案】D

【解析】程序运行过程如下表所示：

	S	M	t
初始状态	0	100	1
第1次循环结束	100	-10	2
第2次循环结束	90	1	3

此时 $S = 90 < 91$ 首次满足条件，程序需在 $t = 3$ 时跳出循环，即 $N = 2$ 为满足条件的最小值，故选D.



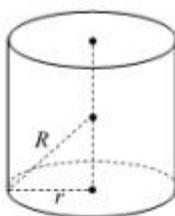
8. 已知圆柱的高为1，它的两个底面的圆周在直径为2的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为 ()

- A. π B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

【答案】B

【解析】由题可知球心在圆柱体中心，圆柱体上下底面圆半径 $r = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

则圆柱体体积 $V = \pi r^2 h = \frac{3\pi}{4}$ ，故选B.



9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为1, 公差不为0. 若 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 前6项的和为()

- A. -24 B. -3 C. 3 D. 8

【答案】A

【解析】 $\because \{a_n\}$ 为等差数列, 且 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 设公差为 d .

$$\text{则 } a_3^2 = a_2 \cdot a_6, \text{ 即 } (a_1 + 2d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 5d)$$

$$\text{又 } \because a_1 = 1, \text{ 代入上式可得 } d^2 + 2d = 0$$

$$\text{又 } \because d \neq 0, \text{ 则 } d = -2$$

$$\therefore S_6 = 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 1 \times 6 + \frac{6 \times 5}{2} \times (-2) = -24, \text{ 故选A.}$$

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx - ay + 2ab = 0$ 相切, 则 C 的离心率为()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】 \because 以 A_1A_2 为直径为圆与直线 $bx - ay + 2ab = 0$ 相切, \therefore 圆心到直线距离 d 等于半径,

$$\therefore d = \frac{|2ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = a$$

$$\text{又 } \because a > 0, b > 0, \text{ 则上式可化简为 } a^2 = 3b^2$$

$$\because b^2 = a^2 - c^2, \text{ 可得 } a^2 = 3(a^2 - c^2), \text{ 即 } \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 故选A}$$

11. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1})$ 有唯一零点, 则 $a = ()$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【答案】C

【解析】由条件, $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1})$, 得:

$$f(2-x) = (2-x)^2 - 2(2-x) + a(e^{2-x-1} + e^{-(2-x)+1})$$

$$= x^2 - 4x + 4 - 4 + 2x + a(e^{-x} + e^{x-1})$$

$$= x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x})$$

$$\therefore f(2-x) = f(x), \text{ 即 } x=1 \text{ 为 } f(x) \text{ 的对称轴,}$$

由题意, $f(x)$ 有唯一零点,

$\therefore f(x)$ 的零点只能为 $x=1$,

$$\text{即 } f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + a(e^{1-1} + e^{-1+1}) = 0,$$

解得 $a = \frac{1}{2}$.

12. 在矩形 $ABCD$ 中， $AB=1$ ， $AD=2$ ，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$ ，则 $\lambda + \mu$ 的最大值为 ()
- A. 3 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. 2

【答案】A

【解析】由题意，画出右图.

设 BD 与 $\odot C$ 切于点 E ，连接 CE .

以 A 为原点， AD 为 x 轴正半轴，
 AB 为 y 轴正半轴建立直角坐标系，
则 C 点坐标为 $(2,1)$.

$\because |CD|=1, |BC|=2.$

$\therefore BD = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$

$\therefore BD$ 切 $\odot C$ 于点 E .

$\therefore CE \perp BD.$

$\therefore CE$ 是 $Rt\triangle BCD$ 中斜边 BD 上的高.

$$|EC| = \frac{2S_{\triangle BCD}}{|BD|} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CD|}{|BD|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

即 $\odot C$ 的半径为 $\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

$\therefore P$ 在 $\odot C$ 上.

$\therefore P$ 点的轨迹方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{5}.$

设 P 点坐标 (x_0, y_0) ，可以设出 P 点坐标满足的参数方程如下：

$$\begin{cases} x_0 = 2 + \frac{2}{5}\sqrt{5} \cos \theta \\ y_0 = 1 + \frac{2}{5}\sqrt{5} \sin \theta \end{cases}$$

而 $\overrightarrow{AP} = (x_0, y_0)$ ， $\overrightarrow{AB} = (0,1)$ ， $\overrightarrow{AD} = (2,0)$.

$\therefore \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD} = \lambda(0,1) + \mu(2,0) = (2\mu, \lambda)$

$\therefore \mu = \frac{1}{2}x_0 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \cos \theta$ ， $\lambda = y_0 = 1 + \frac{2}{5}\sqrt{5} \sin \theta$.

两式相加得：

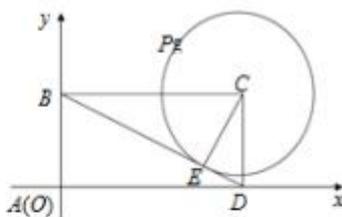
$$\lambda + \mu = 1 + \frac{2}{5}\sqrt{5} \sin \theta + 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \cos \theta$$

$$= 2 + \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} \sin(\theta + \varphi)$$

$$= 2 + \sin(\theta + \varphi) \leq 3$$

(其中 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$)

当且仅当 $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \varphi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 时， $\lambda + \mu$ 取得最大值 3.



二、填空题：（本题共4小题，每小题5分，共20分） www.gaosan.com

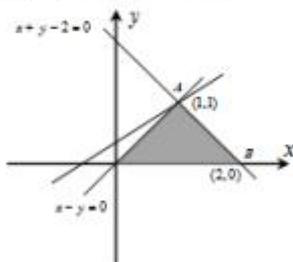
13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \geq 0, \\ x+y-2 \leq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z=3x-4y$ 的最小值为_____.

【答案】 -1

【解析】 由题，画出可行域如图：

目标函数为 $z=3x-4y$ ，则直线 $y=\frac{3}{4}x-\frac{z}{4}$ 纵截距越大， z 值越小.

由图可知： z 在 $A(1,1)$ 处取最小值，故 $z_{\min}=3 \times 1 - 4 \times 1 = -1$.



14. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=-1$ ， $a_1-a_3=-3$ ，则 $a_4=_____$.

【答案】 -8

【解析】 $\because \{a_n\}$ 为等比数列，设公比为 q .

$$\begin{cases} a_1+a_2=-1 \\ a_1-a_3=-3 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a_1+a_1q=-1 \text{ ①} \\ a_1-a_1q^2=-3 \text{ ②} \end{cases}$$

显然 $q \neq 1$ ， $a_1 \neq 0$,

$$\frac{\text{②}}{\text{①}} \text{ 得 } 1-q=3, \text{ 即 } q=-2, \text{ 代入 ① 式可得 } a_1=1,$$

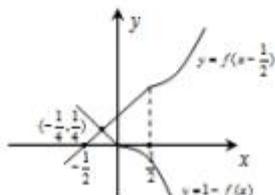
$$\therefore a_4=a_1q^3=1 \times (-2)^3=-8.$$

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x)+f(x-\frac{1}{2})>1$ 的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\frac{1}{4}, +\infty)$

【解析】 $\because f(x)=\begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$ $f(x)+f(x-\frac{1}{2})>1$ ，即 $f(x-\frac{1}{2})>1-f(x)$

由图象变换可画出 $y=f(x-\frac{1}{2})$ 与 $y=1-f(x)$ 的图象如下：



由图可知，满足 $f\left(x-\frac{1}{2}\right) > 1-f(x)$ 的解为 $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

16. a, b 为空间中两条互相垂直的直线，等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a, b 都垂直，斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转，有下列结论：

- ①当直线 AB 与 a 成 60° 角时， AB 与 b 成 30° 角；
- ②当直线 AB 与 a 成 60° 角时， AB 与 b 成 60° 角；
- ③直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45° ；
- ④直线 AB 与 a 所成角的最大值为 60° 。

其中正确的是_____ (填写所有正确结论的编号)

【答案】②③

【解析】由题意知， a, b, AC 三条直线两两相互垂直，画出图形如图。

不妨设图中所示正方体边长为 1，

故 $|AC|=1, |AB|=\sqrt{2}$ ，

斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转，则 A 点保持不变，

B 点的运动轨迹是以 C 为圆心，1 为半径的圆。

以 C 为坐标原点，以 \overrightarrow{CD} 为 x 轴正方向， \overrightarrow{CB} 为 y 轴正方向，

\overrightarrow{CA} 为 z 轴正方向建立空间直角坐标系。

则 $D(1,0,0), A(0,0,1)$ ，

直线 a 的方向单位向量 $\vec{a}=(0,1,0), |\vec{a}|=1$ 。

B 点起始坐标为 $(0,1,0)$ ，

直线 b 的方向单位向量 $\vec{b}=(1,0,0), |\vec{b}|=1$ 。

设 B 点在运动过程中的坐标 $B'(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ ，

其中 θ 为 $B'C$ 与 CD 的夹角， $\theta \in [0, 2\pi)$ 。

那么 AB' 在运动过程中的向量 $\overrightarrow{AB'}=(-\cos\theta, -\sin\theta, 1), |\overrightarrow{AB'}|=\sqrt{2}$ 。

设 $\overrightarrow{AB'}$ 与 \vec{a} 所成夹角为 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，

$$\cos\alpha = \frac{|(-\cos\theta, -\sin\theta, 1) \cdot (0, 1, 0)|}{|\vec{a}| |\overrightarrow{AB'}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} |\sin\theta| \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

故 $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ，所以③正确，④错误。

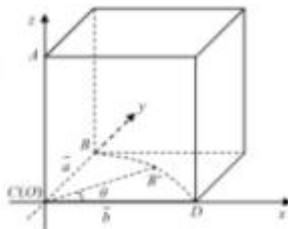
设 $\overrightarrow{AB'}$ 与 \vec{b} 所成夹角为 $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{|\overrightarrow{AB'} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}| |\overrightarrow{AB'}|} \\ &= \frac{|(-\cos\theta, -\sin\theta, 1) \cdot (1, 0, 0)|}{|\vec{b}| |\overrightarrow{AB'}|} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} |\cos\theta| \end{aligned}$$

当 $\overrightarrow{AB'}$ 与 \vec{a} 夹角为 60° 时，即 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ，

$$|\sin\theta| = \sqrt{2} \cos\alpha = \sqrt{2} \cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ，



$$\therefore \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} |\cos \theta| = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \beta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

$$\therefore \beta = \frac{\pi}{3}, \text{ 此时 } \overrightarrow{AB'} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 夹角为 } 60^\circ.$$

\therefore ②正确，①错误.

三、解答题：（共70分，第17-20题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22，23题为选考题，考生根据要求作答）www.gaosan.com

（一）必考题：共60分.

17. (12分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 0, a = 2\sqrt{7}, b = 2$.

(1) 求 c ;

(2) 设 D 为 BC 边上一点，且 $AD \perp AC$ ，求 $\triangle ABD$ 的面积.

【解析】(1) 由 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 0$ 得 $2 \sin(A + \frac{\pi}{3}) = 0$,

$$\text{即 } A + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 又 } A \in (0, \pi),$$

$$\therefore A + \frac{\pi}{3} = \pi, \text{ 得 } A = \frac{2\pi}{3}.$$

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. 又 $\because a = 2\sqrt{7}, b = 2, \cos A = -\frac{1}{2}$ 代入并整理

$$\text{得 } (c+1)^2 = 25, \text{ 故 } c = 4.$$

(2) $\because AC = 2, BC = 2\sqrt{7}, AB = 4$,

$$\text{由余弦定理 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

$\because AC \perp AD$, 即 $\triangle ACD$ 为直角三角形,

则 $AC = CD \cdot \cos C$, 得 $CD = \sqrt{7}$.

$$\text{由勾股定理 } AD = \sqrt{CD^2 - AC^2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{又 } A = \frac{2\pi}{3}, \text{ 则 } \angle DAB = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} |AD| \cdot |AB| \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

18. (12分) 某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶4元，售价每瓶6元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶2元的价格当天全部处理完。根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位： $^{\circ}\text{C}$ ）有关。如果最高气温不低于25，需求量为500瓶；如果最高气温位于区间 $[20, 25)$ ，需求量为300瓶；如果最高气温低于20，需求量为200瓶，为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

最高气温	$[10, 15)$	$[15, 20)$	$[20, 25)$	$[25, 30)$	$[30, 35)$	$[35, 40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率。

- (1) 求六月份这种酸奶一天的需求量 X (单位: 瓶) 的分布列;
 (2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元), 当六月份这种酸奶一天的进货量 n (单位: 瓶) 为多少时, Y 的数学期望达到最大值?

【解析】(1) 易知需求量 x 可取 200, 300, 500

$$P(X=200) = \frac{2+16}{30 \times 3} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=300) = \frac{36}{30 \times 3} = \frac{2}{5}$$

$$P(X=500) = \frac{25+7+4}{30 \times 3} = \frac{2}{5}$$

则分布列为:

X	200	300	500
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

① 当 $n \leq 200$ 时: $Y = n(6-4) = 2n$, 此时 $Y_{\max} = 400$, 当 $n = 200$ 时取到.

$$\begin{aligned} \text{② 当 } 200 < n \leq 300 \text{ 时: } Y &= \frac{4}{5} \cdot 2n + \frac{1}{5} [200 \times 2 + (n-200) \cdot (-2)] \\ &= \frac{8}{5}n + \frac{800-2n}{5} = \frac{6n+800}{5} \end{aligned}$$

此时 $Y_{\max} = 520$, 当 $n = 300$ 时取到.

③ 当 $300 < n \leq 500$ 时,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{5} [200 \times 2 + (n-200) \cdot (-2)] + \frac{2}{5} [300 \times 2 + (n-300) \cdot (-2)] + \frac{2}{5} \cdot n \cdot 2 \\ &= \frac{3200-2n}{5} \end{aligned}$$

此时 $Y < 520$.

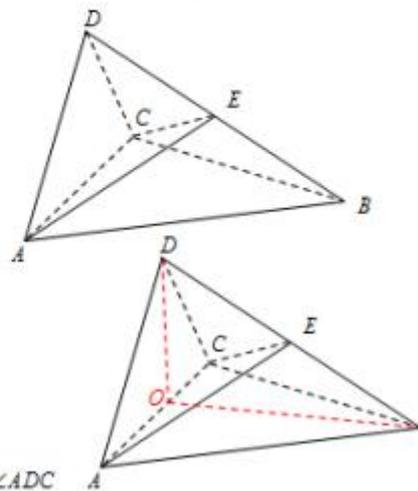
④ 当 $n \geq 500$ 时, 易知 Y 一定小于 ③ 的情况.

综上所述: 当 $n = 300$ 时, Y 取到最大值为 520.

19. (12分) 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, $\triangle ACD$ 是直角三角形, $\angle ABD = \angle CBD$, $AB = BD$.

(1) 证明: 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ;

(2) 过 AC 的平面交 BD 于点 E , 若平面 AEC 把四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分, 求二面角 $D-AE-C$ 的余弦值.



【解析】(1) 取 AC 中点为 O , 连接 BO , DO ;

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形

$\therefore BO \perp AC$

$\therefore AB = BC$

$$\begin{cases} AB = BC \\ BD = BD \\ \angle ABD = \angle CBD \end{cases} \therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD.$$

$\therefore AD = CD$, 即 $\triangle ACD$ 为等腰直角三角形, $\angle ADC = 90^\circ$

$\therefore DO \perp AC$
令 $|AB| = a$, 则 $|AB| = |AC| = |BC| = |BD| = a$

易得: $|OD| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $|OB| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\therefore |OD|^2 + |OB|^2 = |BD|^2$

由勾股定理的逆定理可得 $\angle DOB = \frac{\pi}{2}$

即 $OD \perp OB$

$$\begin{cases} OD \perp AC \\ OD \perp OB \\ AC \cap OB = O \end{cases} \therefore OD \perp \text{平面} ABC$$

$$\begin{cases} AC \subset \text{平面} ABC \\ OB \subset \text{平面} ABC \end{cases}$$

又 $\because OD \subset \text{平面} ADC$

由面面垂直的判定定理可得平面 $ADC \perp$ 平面 ABC

(2) 由题意可知 $V_{D-ACE} = V_{B-ACE}$

即 B, D 到平面 ACE 的距离相等

即 E 为 BD 中点

以 O 为原点, \overrightarrow{OA} 为 x 轴正方向, \overrightarrow{OB} 为 y 轴正方向, \overrightarrow{OD} 为 z 轴正方向, 设 $|AC| = a$, 建立空间直角坐标系,

则 $O(0,0,0)$, $A(\frac{a}{2}, 0, 0)$, $D(0, 0, \frac{a}{2})$, $B(0, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0)$, $E(0, \frac{\sqrt{3}}{4}a, \frac{a}{4})$

易得: $\overrightarrow{AE} = (-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}a, \frac{a}{4})$, $\overrightarrow{AD} = (-\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2})$, $\overrightarrow{OA} = (\frac{a}{2}, 0, 0)$

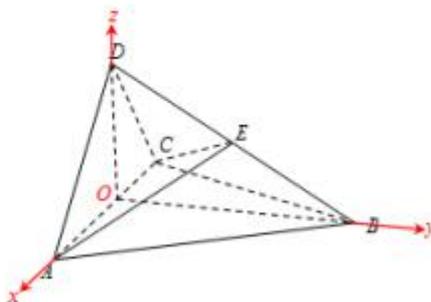
设平面 AED 的法向量为 \overline{n}_1 , 平面 AEC 的法向量为 \overline{n}_2 ,

则 $\begin{cases} \overline{AE} \cdot \overline{n}_1 = 0 \\ \overline{AD} \cdot \overline{n}_1 = 0 \end{cases}$, 解得 $\overline{n}_1 = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$

$\begin{cases} \overline{AE} \cdot \overline{n}_2 = 0 \\ \overline{OA} \cdot \overline{n}_2 = 0 \end{cases}$, 解得 $\overline{n}_2 = (0, 1, -\sqrt{3})$

若二面角 $D-AE-C$ 为 θ , 易知 θ 为锐角,

则 $\cos \theta = \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{\sqrt{7}}{7}$



20. (12分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2x$, 过点 $(2, 0)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.

(1) 证明: 坐标原点 O 在圆 M 上;

(2) 设圆 M 过点 $P(4, -2)$, 求直线 l 与圆 M 的方程.

【解析】(1) 显然, 当直线斜率为 0 时, 直线与抛物线交于一点, 不符合题意.

设 $l: x = my + 2$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立: $\begin{cases} y^2 = 2x \\ x = my + 2 \end{cases}$ 得 $y^2 - 2my - 4 = 0$,

$$\Delta = 4m^2 + 16 \text{ 恒大于 } 0, \quad y_1 + y_2 = 2m, \quad y_1 y_2 = -4.$$

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ &= (my_1 + 2)(my_2 + 2) \\ &= (m^2 + 1)y_1 y_2 + 2m(y_1 + y_2) + 4 \\ &= -4(m^2 + 1) + 2m(2m) + 4 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \vec{OA} \perp \vec{OB}$, 即 O 在圆 M 上.

(2) 若圆 M 过点 P , 则 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$

$$\begin{aligned} (x_1 - 4)(x_2 - 4) + (y_1 + 2)(y_2 + 2) &= 0 \\ (my_1 - 2)(my_2 - 2) + (y_1 + 2)(y_2 + 2) &= 0 \\ (m^2 + 1)y_1 y_2 - (2m - 2)(y_1 + y_2) + 8 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{化简得 } 2m^2 - m - 1 = 0 \text{ 解得 } m = -\frac{1}{2} \text{ 或 } 1$$

① 当 $m = -\frac{1}{2}$ 时, $l: 2x + y - 4 = 0$ 圆心为 $Q(x_0, y_0)$,

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{1}{2}, \quad x_0 = -\frac{1}{2}y_0 + 2 = \frac{9}{4},$$

$$\text{半径 } r = OQ = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\text{则圆 } M: \left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{85}{16}$$

② 当 $m = 1$ 时, $l: x - y - 2 = 0$ 圆心为 $Q(x_0, y_0)$,

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = 1, \quad x_0 = y_0 + 2 = 3,$$

$$\text{半径 } r = OQ = \sqrt{3^2 + 1^2}$$

$$\text{则圆 } M: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$$

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x - 1 - a \ln x$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的值;

(2) 设 m 为整数, 且对于任意正整数 n , $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2}) \cdots (1 + \frac{1}{2^n}) < m$, 求 m 的最小值.

【解析】(1) $f(x) = x - 1 - a \ln x, \quad x > 0$

$$\text{则 } f'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x - a}{x}, \text{ 且 } f(1) = 0$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增, 所以 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$, 不满足题意;

当 $a > 0$ 时,

当 $0 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减;

当 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

① 若 $a < 1$, $f(x)$ 在 $(a, 1)$ 上单调递增. \therefore 当 $x \in (a, 1)$ 时 $f(x) < f(1) = 0$ 矛盾

② 若 $a > 1$, $f(x)$ 在 $(1, a)$ 上单调递减. \therefore 当 $x \in (1, a)$ 时 $f(x) < f(1) = 0$ 矛盾

$$\therefore \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbf{N}^*$$

$$\text{一方面: } \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1,$$

$$\text{即 } \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < e.$$

$$\text{另一方面: } \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) > \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) = \frac{135}{64} > 2$$

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \in (2, e)$$

$$\therefore m \in \mathbf{N}^*, \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < m,$$

$\therefore m$ 的最小值为 3.

22. [选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = kt, \end{cases}$ (t 为参数), 直线 l_2 的参数方程

为 $\begin{cases} x = -2 + m, \\ y = \frac{m}{k}, \end{cases}$ (m 为参数), 设 l_1 与 l_2 的交点为 P , 当 k 变化时, P 的轨迹为曲线 C .

(1) 写出 C 的普通方程:

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设 $l_3: \rho(\cos\theta + \sin\theta) - \sqrt{2} = 0$, M 为 l_3 与 C 的交点, 求 M 的极径.

【解析】(1) 将参数方程转化为一般方程

$$l_1: y = k(x - 2) \quad \dots\dots ①$$

$$l_2: y = \frac{1}{k}(x + 2) \quad \dots\dots ②$$

$$① \times ② \text{ 消 } k \text{ 可得: } x^2 - y^2 = 4$$

即 P 的轨迹方程为 $x^2 - y^2 = 4$;

(2) 将参数方程转化为一般方程

$$l_3: x + y - \sqrt{2} = 0 \quad \dots\dots ③$$

$$\text{联立曲线 } C \text{ 和 } l_3 \begin{cases} x + y - \sqrt{2} = 0 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{由 } \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \text{ 解得 } \rho = \sqrt{5}$$

即 M 的极半径是 $\sqrt{5}$.

23. [选修4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$.

(1) 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x) \geq x^2 - x + m$ 的解集非空, 求 m 的取值范围.

【解析】(1) $f(x) = |x+1| - |x-2|$ 可等价于 $f(x) = \begin{cases} -3, x \leq -1 \\ 2x-1, -1 < x < 2 \\ 3, x \geq 2 \end{cases}$. 由 $f(x) \geq 1$ 可得:

① 当 $x \leq -1$ 时显然不满足题意;

② 当 $-1 < x < 2$ 时, $2x-1 \geq 1$, 解得 $x \geq 1$;

③ 当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = 3 \geq 1$ 恒成立. 综上, $f(x) \geq 1$ 的解集为 $\{x | x \geq 1\}$.

(2) 不等式 $f(x) \geq x^2 - x + m$ 等价于 $f(x) - x^2 + x \geq m$,

令 $g(x) = f(x) - x^2 + x$, 则 $g(x) \geq m$ 解集非空只需要 $[g(x)]_{\min} \geq m$.

$$\text{而 } g(x) = \begin{cases} -x^2 + x - 3, x \leq -1 \\ -x^2 + 3x - 1, -1 < x < 2 \\ -x^2 + x + 3, x \geq 2 \end{cases}$$

① 当 $x \leq -1$ 时, $[g(x)]_{\min} = g(-1) = -3 - 1 - 1 = -5$;

② 当 $-1 < x < 2$ 时, $[g(x)]_{\min} = g\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 = \frac{5}{4}$;

③ 当 $x \geq 2$ 时, $[g(x)]_{\min} = g(2) = -2^2 + 2 + 3 = 1$.

综上, $[g(x)]_{\min} = \frac{5}{4}$, 故 $m \leq \frac{5}{4}$.