

2017年普通高等学校招生全国统一考试

数学(理)(北京卷)

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题 共40分)

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 若集合  $A = \{x | -2 < x < 1\}$ ,  $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ , 则  $A \cap B =$

- (A)  $\{x | -2 < x < -1\}$  (B)  $\{x | -2 < x < 3\}$   
 (C)  $\{x | -1 < x < 1\}$  (D)  $\{x | 1 < x < 3\}$

【答案】A

【解析】 $A \cap B = \{x | -2 < x < -1\}$ , 故选A.

(2) 若复数  $(1-i)(a+i)$  在复平面内对应的点在第二象限, 则实数  $a$  的取值范围是

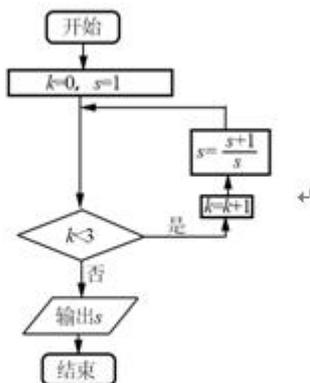
- (A)  $(-\infty, 1)$  (B)  $(-\infty, -1)$   
 (C)  $(1, +\infty)$  (D)  $(-1, +\infty)$

【答案】B

【解析】 $z = (1-i)(a+i) = (a+1) + (1-a)i$ , 因为对应的点在第二象限, 所以

$$\begin{cases} a+1 < 0 \\ 1-a > 0 \end{cases}, \text{ 解得: } a < -1, \text{ 故选 B.}$$

(3) 执行如图所示的程序框图, 输出的  $s$  值为



- (A) 2 (B)  $\frac{3}{2}$  (C)  $\frac{5}{3}$  (D)  $\frac{8}{5}$

【答案】C

【解析】 $k=0$ 时,  $0 < 3$  成立, 第一次进入循环  $k=1, s = \frac{1+1}{1} = 2$ ,  $1 < 3$  成立, 第二次

进入循环,  $k=2, s=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$ ,  $2 < 3$  成立, 第三次进入循环  $k=3, s=\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$ ,  $3 < 3$

否, 输出  $s=\frac{5}{3}$ , 故选 C.

(4) 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \leq 3, \\ x+y \geq 2, \\ y \leq x, \end{cases}$  则  $x+2y$  的最大值为

(A) 1

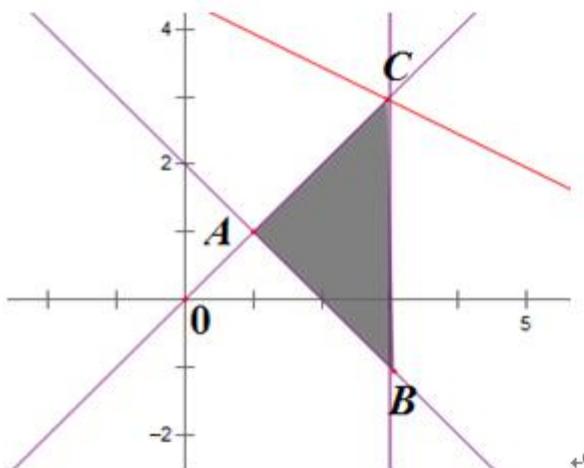
(B) 3

(C) 5

(D) 9

【答案】D

【解析】如图, 画出可行域,



$z=x+2y$  表示斜率为  $-\frac{1}{2}$  的一组平行线, 当过点  $C(3,3)$  时, 目标函数取得最大值

$z_{\max}=3+2 \times 3=9$ , 故选 D.

(5) 已知函数  $f(x)=3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$ , 则  $f(x)$

(A) 是奇函数, 且在  $\mathbf{R}$  上是增函数

(B) 是偶函数, 且在  $\mathbf{R}$  上是增函数

(C) 是奇函数, 且在  $\mathbf{R}$  上是减函数

(D) 是偶函数, 且在  $\mathbf{R}$  上是减函数

【答案】A

【解析】 $f(-x)=3^{-x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3^x = -f(x)$ , 所以函数是奇函数, 并且  $3^x$  是增函数,

$\left(\frac{1}{3}\right)^x$  是减函数, 根据增函数-减函数=增函数, 所以函数是增函数, 故选 A.

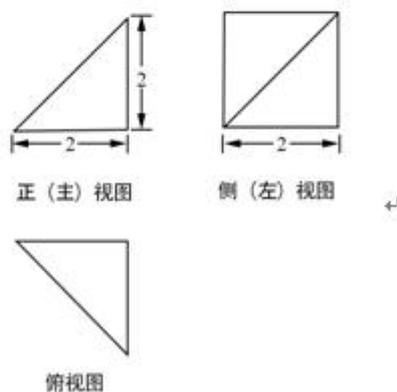
(6) 设  $\vec{m}, \vec{n}$  为非零向量，则“存在负数  $\lambda$ ，使得  $\vec{m} = \lambda\vec{n}$ ”是“ $\vec{m} \cdot \vec{n} < 0$ ”的

- (A) 充分而不必要条件                      (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充分必要条件                          (D) 既不充分也不必要条件

**【答案】A**

**【解析】**若  $\exists \lambda < 0$ ，使  $\vec{m} = \lambda\vec{n}$ ，即两向量反向，夹角是  $180^\circ$ ，那么  $\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}||\vec{n}|\cos 180^\circ = -|\vec{m}||\vec{n}| < 0$ ，反过来，若  $\vec{m} \cdot \vec{n} < 0$ ，那么两向量的夹角为  $(90^\circ, 180^\circ]$ ，学科网并不一定反向，即不一定存在负数  $\lambda$ ，使得  $\vec{m} = \lambda\vec{n}$ ，所以是充分不必要条件，故选 A。

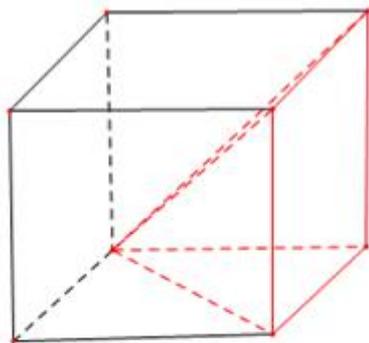
(7) 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的最长棱的长度为



- (A)  $3\sqrt{2}$                       (B)  $2\sqrt{3}$                       (C)  $2\sqrt{2}$                       (D) 2

**【答案】B**

**【解析】**几何体是四棱锥，如图



红色线为三视图还原后的几何体，最长的棱长为正方体的对角线，

$$l = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}, \text{ 故选 B.}$$

(8) 根据有关资料，围棋状态空间复杂度的上限  $M$  约为  $3^{361}$ ，而可观测宇宙中普通物质的

原子总数  $N$  约为  $10^{80}$ 。则下列各数中与  $\frac{M}{N}$  最接近的是

(参考数据:  $\lg 3 \approx 0.48$ )

(A)  $10^{33}$

(B)  $10^{53}$

(C)  $10^{73}$

(D)  $10^{93}$

【答案】D

【解析】 设  $\frac{M}{N} = x = \frac{3^{361}}{10^{80}}$ ，两边取对数，

$$\lg x = \lg \frac{3^{361}}{10^{80}} = \lg 3^{361} - \lg 10^{80} = 361 \times \lg 3 - 80 = 93.28, \text{ 所以 } x = 10^{93.28}, \text{ 即 } \frac{M}{N} \text{ 最接近}$$

$10^{93}$ ，故选 D.

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) 若双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{m} = 1$  的离心率为  $\sqrt{3}$ ，则实数  $m =$  \_\_\_\_\_.

【答案】2

【解析】  $\frac{\sqrt{1+m}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow m = 2$

(10) 若等差数列  $\{a_n\}$  和等比数列  $\{b_n\}$  满足  $a_1=b_1=-1$ ,  $a_4=b_4=8$ , 则  $\frac{a_2}{b_2} =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 1

【解析】  $-1+3d = -q^3 = 8 \Rightarrow d = 3, q = -2 \Rightarrow \frac{a_2}{b_2} = \frac{-1+3}{-1 \times (-2)} = 1$

(11) 在极坐标系中, 点  $A$  在圆  $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$  上, 点  $P$  的坐标为  $(1, 0)$ ,

则  $|AP|$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

【答案】 1

【解析】  $\square C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ , 所以

$$|AP|_{\min} = |AC| - r = 2 - 1 = 1$$

(12) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 角  $\alpha$  与角  $\beta$  均以  $Ox$  为始边, 它们的终边关于  $y$  轴对称.

若  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\cos(\alpha - \beta) =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $-\frac{7}{9}$

【解析】

$$\because \sin \beta = \sin \alpha, \cos \beta = -\cos \alpha \therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

+

(13) 能够说明“设  $a, b, c$  是任意实数. 若  $a > b > c$ , 则  $a+b > c$ ”是假命题的一组整数  $a, b,$

$c$  的值依次为 \_\_\_\_\_.

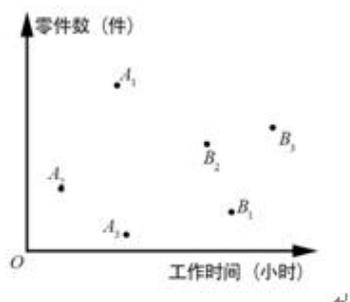
【答案】 -1, -2, -3

【解析】  $-1 > -2 > -3, -1 + (-2) = -3$

(14) 三名工人加工同一种零件, 他们在一天中的工作情况如图所示, 其中点  $A_i$  的横、纵坐标分别为第  $i$  名工人上午的工作时间和加工的零件数, 点  $B_i$  的横、纵坐标分别为第  $i$  名工人下午的工作时间和加工的零件数,  $i=1, 2, 3$ .

① 记  $Q_i$  为第  $i$  名工人在这一天中加工的零件总数, 则  $Q_1, Q_2, Q_3$  中最大的是 \_\_\_\_\_.

② 记  $p_i$  为第  $i$  名工人在这一天中平均每小时加工的零件数, 则  $p_1, p_2, p_3$  中最大的是 \_\_\_\_\_.



【答案】 $Q_1; P_2$ 。

【解析】作图可得  $A_1B_1$  中点纵坐标比  $A_2B_2, A_3B_3$  中点纵坐标大，所以第一位选  $Q_1$ 。

分别作  $B_1, B_2, B_3$  关于原点的对称点  $B_1', B_2', B_3'$ ，比较直线  $A_1B_1', A_2B_2', A_3B_3'$  斜率，可得  $A_2B_2'$  最大，所以选

$P_2$ 。

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分) www.gaosan.com

在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 60^\circ$ ， $c = \frac{3}{7}a$ 。

(I) 求  $\sin C$  的值；

(II) 若  $a=7$ ，求  $\triangle ABC$  的面积。

【答案】

(1) 根据正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{C \times \sin A}{a} = \frac{3}{7} \times \sin 60^\circ = \frac{3}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

(2) 当  $a = 7$  时  $c = \frac{3}{7}a = 3$

$$\sin C = \frac{3}{14} \sqrt{3} < a$$

$$\therefore \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{3}{14}$$

$\triangle ABC$  中

$$\sin B = \sin[\pi - (A + C)] = \sin(A + C)$$

$$= \sin A \times \cos C + \cos A \times \sin C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{14} + \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \times \sin B = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 \times \frac{3}{14} \sqrt{3} = \frac{9}{4} \sqrt{3}$$

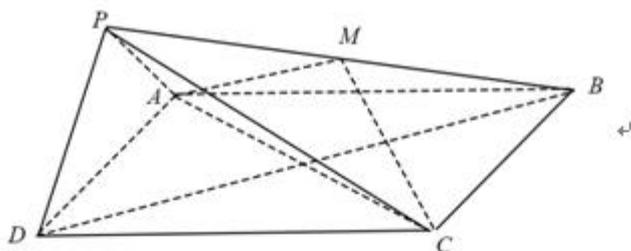
(16) (本小题 14 分)

如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  为正方形，平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ，点  $M$  在线段  $PB$  上， $PD \parallel$  平面  $MAC$ ， $PA=PD=\sqrt{6}$ ， $AB=4$ 。

(I) 求证： $M$  为  $PB$  的中点；

(II) 求二面角  $B-PD-A$  的大小；

(III) 求直线  $MC$  与平面  $BDP$  所成角的正弦值。



【答案】

(1) 连接  $AC$ ， $BD$ ， $AC \cap BD = O$ ，连接  $OM$ 。

$\because PD \parallel$  平面  $MAC$  且平面  $PBD \cap$  平面  $MAC = MO$

$\therefore PD \parallel MO$

$\because O$  为  $BD$  中点

$\therefore M$  为  $PB$  中点

(2) 取  $AD$  中点  $E$ ，连接  $PE$ 。

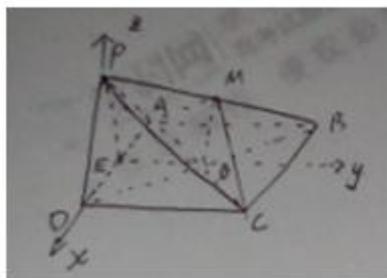
$\because PA=PD$

$\therefore PE \perp AD$

又  $\because$  平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$  且平面  $PAD \cap$  平面  $ABCD = AD$

$\therefore PE \perp$  平面  $ABCD$

建立如图所示坐标系.



则  $B(-2, 4, 0)$   $P(0, 0, \sqrt{2})$   $D(2, 0, 0)$   $A(-2, 0, 0)$ .

易知平面 PDA 的法向量  $\vec{m} = (0, 1, 0)$ .

设平面 BPD 的法向量  $\vec{n} = (x_0, y_0, z_0)$ , 则.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DP} = (x_0, y_0, z_0) \cdot (-2, 0, \sqrt{2}) = -2x_0 + \sqrt{2}z_0 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{DB} = (x_0, y_0, z_0) \cdot (-4, 4, 0) = -4x_0 + 4y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \vec{n} = (1, 1, \sqrt{2})$$

$\therefore$  二面角 B-PD-A 的平面角  $\theta$ .

$$\cos \theta = \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

(3) 由 (2) 可知  $M(-1, 2, \frac{\sqrt{2}}{2})$   $C(2, 4, 0)$   $\vec{MC} = (3, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

设直线 MC 与平面 BPD 的角为  $\alpha$ , 则有

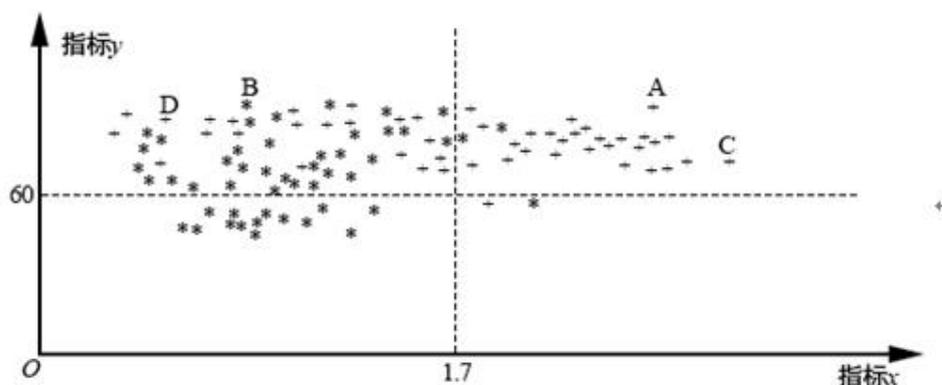
$$\sin \alpha = \left| \cos \langle \vec{MC}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{MC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{MC}| |\vec{n}|} = \frac{3 + 2 - 1}{\sqrt{1 + 1 + (\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

$\therefore$  直线 MC 与平面 BPD 所成角的正弦值为  $\frac{2\sqrt{6}}{9}$

(17) (本小题 13 分).

为了研究一种新药的疗效, 选 100 名患者随机分成两组, 每组各 50 名, 一组服药, 另

一组不服药一段时间后，记录了两组患者的生理指标  $x$  和  $y$  的数据，并制成下图，其中“\*”表示服药者，“+”表示为服药者。



- (I) 从服药的 50 名患者中随机选出一人，求此人指标  $y$  的值小于 60 的概率；
- (II) 从图中 A, B, C, D 四人中随机选出两人，记  $\xi$  为选出的两人中指标  $x$  的值大于 1.7 的人数，求  $\xi$  的分布列和数学期望  $E(\xi)$ ；
- (III) 试判断这 100 名患者中服药者指标  $y$  数据的方差与未服药者指标  $y$  数据的方差的大小。(只需写出结论)

**【答案】**

(I) 由图可知，在 50 名服药患者中，有 15 名患者指标  $y$  的值小于 60，则从服药的 50 名患者中随机选出一人，此人指标  $y$  的值小于 60 的概率为  $\frac{15}{50}$  即  $\frac{3}{10}$ 。

(II) 由图，A、C 两人指标  $x$  的值大于 1.7，而 B、D 两人则小于 1.7，可知在四人中随机选出的人， $\xi$  的可能取值为 0, 1, 2。

$$P(\xi=0) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}, P(\xi=1) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{3},$$

且

$$P(\xi=2) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$$

分布列如下 [www.gaosan.com](http://www.gaosan.com)

$\xi$	0	1	2
$p$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

$E(\xi) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = 1$ ，即所求数学期望为 1。

(III) 由图知 100 名患者中服药者指标  $y$  数据的方差比未服药者指标  $y$  数据的方差大。

(18) (本小题 14 分)

已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  过点  $P(1, 1)$ ，过点  $(0, \frac{1}{2})$  作直线  $l$  与抛物线  $C$  交于不同的

两点  $M, N$ ，过点  $M$  作  $x$  轴的垂线分别与直线  $OP, ON$  交于点  $A, B$ ，其中  $O$  为原点。

(I) 求抛物线  $C$  的方程，并求其焦点坐标和准线方程；

(II) 求证： $A$  为线段  $BM$  的中点。

【答案】

(I) 把  $P(1, 1)$  代入  $y^2 = 2px$  得  $p = \frac{1}{2}$ ， $\therefore C: y^2 = x$ 。焦点坐标  $(\frac{1}{4}, 0)$ ，准线： $x = -\frac{1}{4}$ 。

(II) 设  $l: y = kx + \frac{1}{2}$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $OP: y = x$ ， $ON: y = \frac{y_2}{x_2}x$ ，由题知  $A(x_1, x_1)$ ，

$B(x_2, \frac{x_2 y_2}{x_2})$

$$\begin{cases} y > kx + \frac{1}{2} \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow k^2 x^2 + (k-1)x + \frac{1}{4} = 0, \quad x_1 + x_2 = \frac{1-k}{k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4k^2}$$

$$y_1 + \frac{x_2 y_2}{x_2} = kx_1 + \frac{1}{2} + \frac{x_2(kx_1 + \frac{1}{2})}{x_2} = 2kx_1 + \frac{x_1 + x_2}{2x_2}, \quad \text{由 } x_1 + x_2 = \frac{1-k}{k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{4k^2},$$

$$\text{上式} = 2kx_1 + \frac{\frac{1-k}{k^2}}{2 \cdot \frac{1}{4k^2 x_1}} = 2kx_1 + (1-k) \cdot 2x_1 = 2x_1 \therefore A \text{ 为线段 } BM \text{ 中点。}$$

(19) (本小题 13 分)

已知函数  $f(x) = e^x \cos x - x$ 。

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程；

(II) 求函数  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的最大值和最小值。

【答案】

$$(I) f(x) = e^x \cdot \cos x - x \cdot f(0) = 1$$

$$\therefore f(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1$$

$$f(0) = 0$$

$\therefore y = f(x)$  在  $(0, f(0))$  处切线过点  $(0, 1)$ ,  $k = 0$

$\therefore$  切线方程为  $y = 1$

$$(II) f(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1, \text{ 设 } f(x) = g(x)$$

$$\therefore g'(x) = -2\sin x \cdot e^x \leq 0 \quad \therefore g(x) \text{ 在 } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 上单调递减,}$$

$$\therefore g(x) \leq g(0) = 0 \quad \therefore f(x) \leq 0 \quad \therefore f(x) \text{ 在 } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 上单调递减,}$$

$$f(x)_{\max} = f(0) = 1$$

$$\therefore f(x)_{\min} = f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$$

(20) (本小题 13 分)

设  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  是两个等差数列, 记

$$c_n = \max\{b_1 - a_n, b_2 - a_n, \dots, b_n - a_n\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

其中  $\max\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  表示  $x_1, x_2, \dots, x_s$  这  $s$  个数中最大的数.

(I) 若  $a_n = n$ ,  $b_n = 2n - 1$ , 求  $c_1, c_2, c_3$  的值, 并证明  $\{c_n\}$  是等差数列;

(II) 证明: 或者对任意正数  $M$ , 存在正整数  $m$ , 当  $n \geq m$  时,  $\frac{c_n}{n} > M$ ; 或者存在正整

数  $m$ , 使得  $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$  是等差数列.

**【答案】**

$$c_1 = \max\{b_1 - a_1\} = \max\{0\} = 0$$

$$(I) \text{ 当 } n \geq 1 \text{ 时, } c_2 = \max\{b_1 - 2a_1, b_2 - 2a_2\} = \max\{-1, 1\} = 1$$

$$c_3 = \max\{b_1 - 3a_1, b_2 - 3a_2, b_3 - 3a_3\} = \max\{-2, -3, -4\} = -2$$

所以, 对于  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  且  $n \geq 2$ , 都有  $c_n = b_1 - a_n$ , 只需比较  $b_1 - a_n$  与其他项的大小比较

$$\text{当 } k \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } 1 < k < n \text{ 时, } (b_k - a_k n) - (b_1 - a_n)$$

$$= [(2k-1) - nk] - 1 + n < (1-k)n + 2(k-1) = (k-1)(2-n)$$

因为  $k-1 > 0$ , 且  $2-n < 0$ , 所以  $b_k - a_k n \leq b_1 - a_n$

所以 对于  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  且  $n \geq 2$   $c_n = b_1 - a_n = 1 - n$

所以  $c_n - c_{n-1} = -1 \quad n \geq 2$

又  $c_2 - c_1 = -1$

所以  $\{c_n\}$  是以首项  $c_1 = 0$   $d = -1$  为公差的等差数列。

(II)

(1) 设  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  的公差为  $d_1, d_2$ ，对于  $b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn$

其中任意项  $b_i - a_in \quad (i \in N^*, 1 < i < n)$

$$\begin{aligned} b_i - a_in &= [b_1 + (i-1)d_2] - [a_1 + (i-1)d_1]n \\ &= (b_1 - a_1n) + (i-1)(d_2 - d_1n) \end{aligned}$$

①若  $d_2 \leq 0$ ，则  $(b_i - a_in) - (b_1 - a_1n) = (i-1)d_2 \leq 0$

则对于给定的正整数  $n$ ， $C_n = b_1 - a_1n$

此时  $C_{n+1} - C_n = -a_1$ ，故数列  $\{C_n\}$  为等差数列

②若  $d_2 > 0$ ，则  $(b_i - a_in) - (b_n - a_nn) = (i-n)d_2 \leq 0$

则对于给定正整数  $n$ ， $C_n = b_n - a_nn = b_n - a_1n$

此时  $C_{n+1} - C_n = d_2 - a_1$ ， $\therefore$  数列  $\{C_n\}$  为等差数列

(2) 若  $d_1 > 0$ ，此时  $-d_1n + d_2$  为一个大于  $n$  的一次函数形式

故必存在  $m \in N^*$ ，当  $n \geq m$  时， $-d_1n + d_2 \leq 0$

则当  $n \geq m$ ， $(b_1 - a_1n) - (b_n - a_nn) \leq 0$

所以  $n \geq m$  时， $c_n = b_1 - a_1n$

所以  $\{c_n\}$  是从第  $m$  项开始为等差数列。

(3) 若  $d_1 < 0$  此时  $d_1 \cdot n + d_2$  为一个关于  $n$  的一次函数，

故必存在  $S \in N^*$ ，当  $n \geq S$ ， $-d_1n + d_2 > 0$

则当  $n \geq S$  时， $(b_1 - a_1n) - (b_n - a_nn) \leq 0$

因此当  $n \geqslant S$  时,  $c_n = b_n - a_n n$  ↵

此时,  $\frac{c_n}{n} = \frac{b_n - a_n n}{n} = -a_n + \frac{b_n}{n} = -d_1 n + (d_1 - a_1 + d_2) + \frac{b_1 - d_2}{n}$  ↵

令  $-d_1 = A > 0$ ,  $d_1 - a_1 + d_2 = B$ ,  $b_1 - d_2 = C$  ↵

下证:  $\frac{c_n}{n} = An + B + \frac{C}{n}$  对任意正数  $M$ , 存在  $m \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n \geqslant m$  时 ↵

$\frac{c_n}{n} > m$  ↵

①  $C \geq 0$  取  $m = \left[ \frac{M-B}{A} \right] + 1$  ( $[x]$  取不大于  $x$  的整数) ↵

当  $n \geqslant m$  时,  $\frac{c_n}{n} > Am + B = A \left( \left[ \frac{M-B}{A} \right] + 1 \right) + B > A \left( \frac{M-B}{A} + B \right) = M$  ↵

成立 ↵

② 若  $C < 0$ , 取  $m = \left[ \frac{M-C-B}{A} \right] + 1$  ↵

当  $n \geqslant m$  时,  $\frac{c_n}{n} \geq Am + B \geq Am + B + C \geq A \left( \left[ \frac{M-C-B}{A} \right] + 1 \right) + B + C = M$  ↵

成立 ↵

综上, 对任意正整数  $M$  存在  $m \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n \geqslant m$  时  $\frac{c_n}{n} > m$  ↵

命题得证. ↵