2017年普通高等学校招生全国统一考试
文科数学

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷和答题卡相应位置上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{1,2,3\}$， $B=\{2,3,4\}$， 则 $A\cup B=$

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,3,4\}$

【答案】A

【解析】由题意 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$，故选 A.

2. $(1+i)(2+i)=$

A. 1-i　　B. 1+3i　　C. 3+i　　D. 3+3i

【答案】B

【解析】由题意 $(1+i)(2+i)=2+3i+i^2=1+3i$，故选 B.

3. 函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的最小正周期为

A. 4π　　B. 2π　　C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】C

【解析】由题意 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故选 C.

4. 设非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\mathbf{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\mathbf{b}|=|\boldsymbol{a}-\mathbf{b}|$ 则

A $\boldsymbol{a}\perp\mathbf{b}$　　B. $|\boldsymbol{a}|=|\mathbf{b}|$　　C. $\boldsymbol{a}\parallel\mathbf{b}$　　D. $|\boldsymbol{a}|>|\mathbf{b}|$

【答案】A

【解析】由 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ 平方得 $(\vec{a})^2+2\vec{a}\vec{b}+(\vec{b})^2=(\vec{a})^2-2\vec{a}\vec{b}+(\vec{b})^2$，即 $\vec{a}\vec{b}=0$，则 $\vec{a}\perp\vec{b}$，故选 A.

5. 若 $a>1$，则双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的离心率的取值范围是

A. $(\sqrt{2},+\infty)$　　B. $(\sqrt{2},2)$　　C. $(1,\sqrt{2})$　　D. $(1,2)$

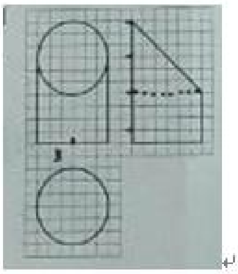
【答案】C

【解析】由题意 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+1}{a^2}=1+\frac{1}{a^2}$，因为 $a>1$，所以 $1<1+\frac{1}{a^2}<2$，则 $1<e<\sqrt{2}$，

故选 C.

6.如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为

A. 90π　　B. 63π　　C. 42π　　D. 36π



【答案】B

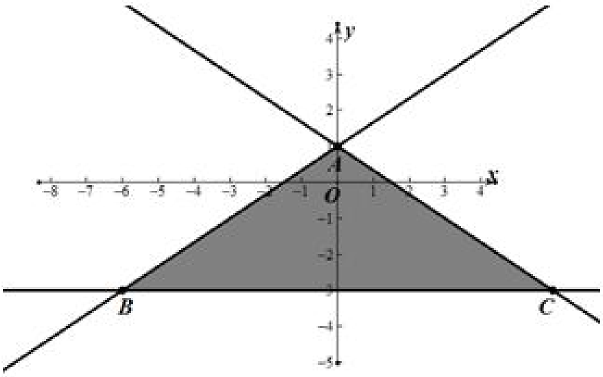
【解析】由题意，该几何体是由高为 6 的圆柱截取一半后的图形加上高为 4 的圆柱，故其体积为 $V=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot3^2\cdot6+\pi\cdot3^2\cdot4=63\pi$，故选 B.

7.设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\le0\\2x-3y+3\ge0\\y+3\ge0\end{cases}$ 。则 $z=2x+y$ 的最小值是

A. -15　　B.-9　C. 1　　D 9

【答案】A

绘制不等式组表示的可行域，结合目标函数的几何意义可得函数在点 $B(-6,-3)$ 处取得最小值 $z=-12-3=-15$.故选 A.



8.函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间是

A.$(-\infty,-2)$ B. $(-\infty,-1)$ C.$(1,+\infty)$ D. $(4,+\infty)$

【答案】D

【解析】函数有意义，则：$x^2-2x-8>0$ ，解得：$x<-2$ 或 $x>4$ ，结合二次函数的单调性、对数函数的单调性和复合函数同增异减的原则可得函数的单调增区间为 $(4,+\infty)$.

故选 D.

9.甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩，老师说，你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩，看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩，根据以上信息，则

A.乙可以知道两人的成绩 B.丁可能知道两人的成绩

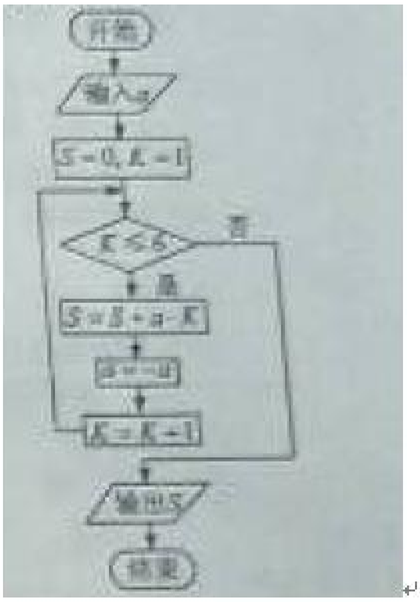
C.乙、丁可以知道对方的成绩 D.乙、丁可以知道自己的成绩

【答案】D

【解析】由甲的说法可知乙、丙一人优秀一人良好，则甲丁一人优秀一人良好，乙看到丙的结果则知道自己的结果，丁看到甲的结果则知道自己的结果，故选 D.

10.执行右面的程序框图，如果输入的 a=-1，则输出的 S=

A.2 B.3 C.4 D.5



【答案】B

【解析】阅读流程图，初始化数值 $a=-1,k=1,S=0$

循环结果执行如下：

第一次：$S=0-1=-1,a=1,k=2$ ；

第二次：$S=-1+2=1,a=-1,k=3$ ；

第三次：$S=1-3=-2,a=1,k=4$ ；

第四次：$S=-2+4=2,a=-1,k=5$ ；

第五次：$S=2-5=-3,a=1,k=6$ ；

第六次：$S=-3+6=3,a=-1,k=7$ ；

结束循环，输出 $S=3$.故选 B.

11.从分别写有 1,2,3,4,5 的 5 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取 1 张，则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{2}{5}$

【答案】D

【解析】如下表所示，表中的点横坐标表示第一次取到的数，纵坐标表示第二次取到的数

	1	2	3	4	5
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)

总计有 25 种情况，满足条件的有 10 种

所以所求概率为 $\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$。

12.过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点 F，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M（M 在 x 轴上方），l 为 C 的准线，点 N 在 l 上且 MN⊥l,则 M 到直线 NF 的距离为

A. $\sqrt{5}$　B. $2\sqrt{2}$　C. $2\sqrt{3}$　D. $3\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】由题知 $MF: y=\sqrt{3}(x-1)$，与抛物线 $y^2=4x$ 联立得 $3x^2-10x+3=0$，解得 $x_1=\frac{1}{3}, x_2=3$

所以 $M(3,2\sqrt{3})$，因为 $MN\perp l$，所以 $N(-1,2\sqrt{3})$，因为 $F(1,0)$，所以 $NF: y=-\sqrt{3}(x-1)$

所以 M 到 NF 的距离为 $\frac{|\sqrt{3}(3-1)+2\sqrt{3}|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}}=2\sqrt{3}$。

二、填空题，本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.函数 $f(x)=2\cos x+\sin x$ 的最大值为______________.

【答案】$\sqrt{5}$

【解析】$f(x)\le\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$

14.已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=2x^3+x^2$，

则 $f(2)=$______________

【答案】12

【解析】$f(2)=-f(-2)=-[2\times(-8)+4]=12$

15.长方体的长、宽、高分别为3,2,1，其顶点都在球O的球面上，则球O的表面积为_____

【答案】14π.

【解析】球的直径是长方体的体对角线，所以 $2R=\sqrt{3^2+2^2+1}=\sqrt{14}, S=4\pi R^2=14\pi$.

16.△ABC的内角A,B,C的对边分别为 a,b,c,若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$,则 B=____________

【答案】$\frac{\pi}{3}$

【解析】由正弦定理可得

$$2\sin B\cos B=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin(A+C)=\sin B\Rightarrow\cos B=\frac{1}{2}\Rightarrow B=\frac{\pi}{3}$$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，第 17 至 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

已知等差数列{a_n}的前 n 项和为 Sn,等比数列{b_n}的前 n 项和为 Tn,a_1=-1,b1=1, $a_2+b_2=2$.

（1） 若 $a_3+b_3=5$ ，求{b_n}的通项公式；

（2）若 T=21，求 S_1.

【解析】(1) 设 $\{a_n\}$ 公差为 d，$\{b_n\}$ 公比为 q，由等差数列、等比数列的通项公式可得

$$\begin{cases}-1+d+q=2\\-1+2d+q^2=5\end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases}d=1\\q=2\end{cases}$$，故 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^{n-1}$.

(2) 由 (1) 及已知得 $$\begin{cases}-1+2d+q=2\\1+q+q^2=21\end{cases}$$，解得 $$\begin{cases}q=4\\d=-1\end{cases}$$ 或 $$\begin{cases}q=-5\\d=8\end{cases}$$

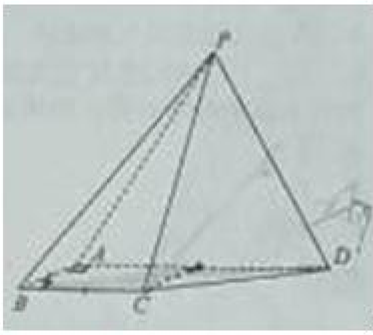
$$\therefore S_3=3a_1+\frac{3\times2}{d}=-6 \text{或} S_3=3a_1+\frac{3\times2}{d}=21.$$

18.(12 分)

如图，四棱锥 P-ABCD 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 ABCD，AB=BC=$\frac{1}{2}$AD，∠BAD=∠ABC=90°。

（1） 证明：直线 BC // 平面 PAD;

（2） 若△PAD 面积为 $2\sqrt{7}$，求四棱锥 P-ABCD 的体积。



.【解析】（1）证明：∵底面 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle ABC=90°$

∴ $BC//AD$

又 $AD\subset$ 平面 PAD，$BC\not\subset$ 平面 PAD，∴ $BC//$ 平面 PAD.

（2）∵侧面 PAD 是等边三角形，且垂直于底面 $ABCD$，

∴ ΔPAD 中 AD 边上的高也是四棱锥 $P-ABCD$ 的高，设为 h，由 ΔPAD 的面积为 $2\sqrt{7}$ 得

$\frac{1}{2}\cdot AD^2\sin 60°=2\sqrt{7}$ ①　$\frac{1}{2}AD\cdot h=2\sqrt{7}$ ②

由①②可得 $AD^2=\frac{8\sqrt{21}}{3}$，$h=\frac{4\sqrt{7}}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

在底面 $ABCD$ 中，由 $AB=BC=\frac{1}{2}AD$

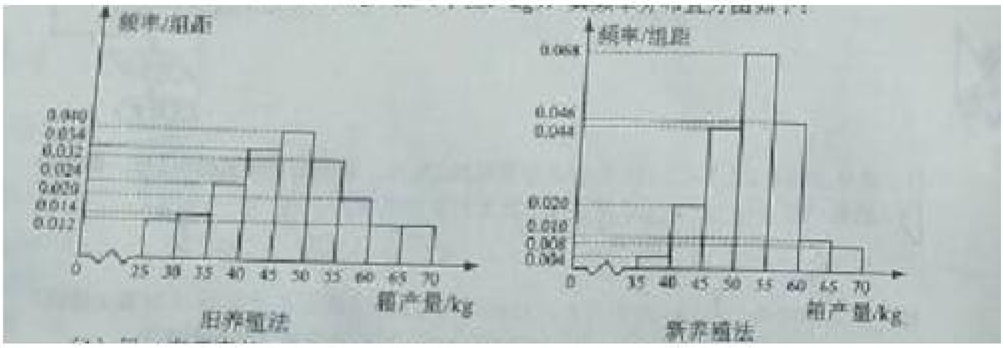
∴ $V_{四棱锥P-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{四边形ABCD}\cdot h$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot AB\cdot h=\frac{1}{6}\left(\frac{AD}{2}+AD\right)\cdot\frac{AD}{2}\cdot h$

$=\frac{1}{8}\cdot AD^2\cdot h=\frac{1}{8}\times\frac{8\sqrt{21}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

19（12 分）

海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测里各箱水产品的产量（单位：kg），学.科网其频率分布直方图如下：



（1）　记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg”，估计 A 的概率；

（2）　填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关：

	箱产量＜50kg	箱产量≥50kg
旧养殖法		
新养殖法		

（3） 根据箱产量的频率分布直方图，对两种养殖方法的优劣进行比较。

附：

P（$K^2 \geq k$）	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

【解析】（1）由频率分布直方图知，旧养殖法的箱产量低于 50 kg 的频率为

$(0..012+0.014+0.024+0.034+0.040)\times 5=0.62$，则估计事件 A 的概率为 $P(A)=0.62$.

（2）列联表如下：

	箱产量 $<50kg$	箱产量 $\geq 50kg$
旧养殖法	62	38
新养殖法	34	66

$\therefore k^2=\dfrac{200(62\times 66-38\times 34)^2}{100\times 100\times 104\times 96}\approx 15.705>10.828$，

∴有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关.

（3）由箱产量的频率分布直方图可知，旧养殖法的箱产量均值约在 45~50kg，新养殖法的箱产量约在 50~55kg，可知新养殖法比旧养殖法的箱产量高.

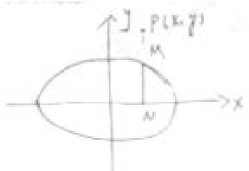
20.（12 分）

设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 C:$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{NM}$

（1） 求点 P 的学*科网轨迹方程；

设点 在直线 x=-3 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$.证明过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

【解析】（1）设 $P(x,y),N(x,0),M(x,y_1)$



由 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$ 知

$y=\sqrt{2}y_1$ 即 $y_1=\dfrac{y}{\sqrt{2}}$

又 M 点在椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，则有

$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 即 $x^2+y^2=2$

（2）设 $Q(-3,t),P\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$，则有

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)\left(-3-\sqrt{2}\cos\theta,t-\sqrt{2}\sin\theta\right)$

$=-3\sqrt{2}\cos\theta-2\cos^2\theta+\sqrt{2}t\sin\theta-2\sin^2\theta=1$

即 $-3\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}t\sin\theta-3=0$

设椭圆右焦点 $F(-1,0)$

又 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(\sqrt{2}\cos\theta+1,\sqrt{2}\sin\theta\right)(-3,t)$

$=-3\sqrt{2}\cos\theta-3+\sqrt{2}t\sin\theta=0$ $\quad\therefore\overrightarrow{FP}\perp\overrightarrow{OQ}$

$\therefore$ 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

（21）（12 分）

设函数 $f(x)=(1-x^2)e^x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\geq0$ 时，$f(x)\leq ax+1$，求 a 的取值范围.

【解析】（1）$f'(x)=-2xe^x+\left(1-x^2\right)e^x=\left(1-2x-x^2\right)e^x$

令 $f'(x)=0$ 得 $x^2+2x-1=0$，解得 $x_1=-\sqrt{2}-1,x_2=\sqrt{2}-1$

$\therefore$ $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\sqrt{2}-1\right),\left(\sqrt{2}-1,+\infty\right)$ 是减函数，

在区间 $\left(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1\right)$ 是增函数

（2）$\because$ $x\geq0$ 时，$f(x)\leq ax+1$，$\therefore\left(1-x^2\right)e^x\leq ax+1$

$\therefore$ $x^2e^x-e^x+ax+1\geq0$，令 $h(x)=x^2e^x-e^x+ax+1$，

即 $x\in[0,+\infty)$ 时，$h(x)\geq0$，而 $h(0)=0$，$\therefore$ $h'(0)\geq0$

$\therefore$ $a-1\geq0,a\geq1$；

再令 $\varphi(x)=h'(x)=x^2e^x+2xe^x-e^x+a$，$\varphi'(x)=\left(x^2+4x+1\right)e^x$

$x \ge 0$时，$\varphi'(x) > 0$恒成立. $\therefore h'(x)$在$[0,+\infty)$是增函数，

恒有$h'(x) \ge 0$，从而$h(x)$是增函数，$h(0)=0$，$h(x) \ge 0$

在$[0,+\infty)$恒成立，故$a \ge 1$即为所求.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴学科&网为极轴建立极坐标系。曲线 C_1 的极坐标方程为$\rho cos\theta = 4$

（1）M为曲线 C_1 的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足 $|OM|\cdot|OP| = 16$，求点 P 的轨迹 C_2的直角坐标方程；

（2）设点 A 的极坐标为$(2,\frac{\pi}{3})$，点 B 在曲线 C_2上，求$\triangle OAB$ 面积的最大值。

【解析】（1）设点 P 的极坐标为(ρ,θ)，$\because |OM|\cdot|OP|=16$，$\therefore$点 M 的极坐标为$\left(\frac{16}{\rho},\theta\right)$

把点 M 的坐标代入$C_1:\rho\cos\theta=4$中得：$\frac{16}{\rho}\cdot\cos\theta=4$，即$\rho=4\cos\theta$

两边同时乘以ρ，得$\rho^2=4\rho\cos\theta$，化为直角坐标方程为$x^2+y^2-4x=0$.

（2）C_2的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta$，所以点 B 的极坐标可设为$(4\cos\theta,\theta)$，$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

又 A 的极坐标为$\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\angle AOB$

$=\frac{1}{2}\times2\times4\cos\theta\left|\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right|$

$=\left|4\cos\theta\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)\right|$

$=\left|2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\right|$

$\because\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore 2\theta-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{4\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore$当$2\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$即$\theta=-\frac{\pi}{2}$时，

$\triangle OAB$ 的面积取最大值为 $2+\sqrt{3}$.

23. [选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知 $a>0,b>0,a^2+b^2=2$。证明：

（1）$(a+b)(a^3+b^3)\ge 4$ ；

（2）$a+b\le 2$。

【解析】（1）$\because a^2+b^2=2, a>0, b>0$，

$\therefore (a+b)(a^3+b^3)=(a+b)^2(a^2+b^2-ab)=(a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-ab)$

$=(2+2ab)(2-ab)=-2(ab)^2+2ab+4$

令 $a=\sqrt{2}\cos\theta, b=\sqrt{2}\sin\theta$， $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $ab=\sin 2\theta\in(0,1]$

$\therefore$ 当 $ab=1$ 时，$(a+b)(a^3+b^3)$ 取到最小值 4.

即 $(a+b)(a^3+b^3)\ge 4$.

（2）$a+b=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$， $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，

当 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$a+b$ 取到最大值 2.

即 $a+b\le 2$.