

## 2017 年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

## 理科数学

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符号题目要求的。

(1) 设函数  $y=\sqrt{4-x^2}$  的定义域 A，函数  $y=\ln(1-x)$  的定义域为 B，则  $A \cap B =$

- (A)  $(1, 2)$       (B)  $(1, 2]$       (C)  $(-2, 1)$       (D)  $[-2, 1)$

【答案】D

【解析】由  $4-x^2 \geq 0$  得  $-2 \leq x \leq 2$ ，由  $1-x > 0$  得  $x < 1$ ，故

$$A \cap B = \{x | -2 \leq x \leq 2\} \cap \{x | x < 1\} = \{x | -2 \leq x < 1\}$$

(2) 已知  $a \in R$ ,  $i$  是虚数单位, 若  $z = a + \sqrt{3}i$ ,  $z \cdot \bar{z} = 4$ , 则  $a =$

- (A) 1 或 -1      (B)  $\sqrt{7}$  或  $-\sqrt{7}$       (C)  $-\sqrt{3}$       (D)  $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】由  $z = a + \sqrt{3}i$ ,  $z \cdot \bar{z} = 4$  得  $a^2 + 3 = 4$ , 所以  $a = \pm 1$ , 故选 A.

(3) 已知命题  $p$ :  $\forall x > 0$ ,  $\ln(x+1) > 0$ ; 命题  $q$ : 若  $a > b$ , 则  $a^2 > b^2$ , 下列命题为真命题的是

- (A)  $p \wedge q$       (B)  $p \wedge \neg q$       (C)  $\neg p \wedge q$       (D)  $\neg p \wedge \neg q$

【答案】B

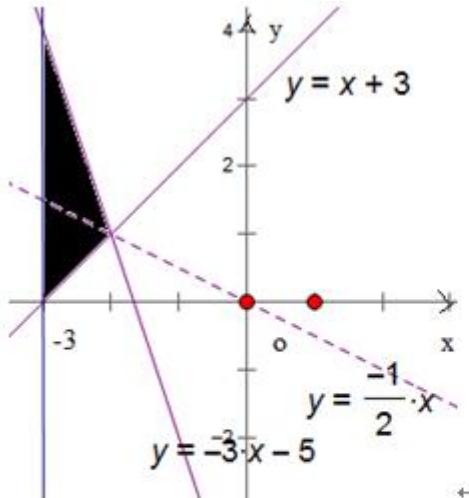
【解析】由  $x > 0$  时  $x+1 > 1$ ,  $\ln(x+1)$  有意义, 知  $p$  是真命题, 由  $2 > 1$ ,  $2^2 > 1^2$ ;  $-1 > -2$ ,  $(-1)^2 < (-2)^2$  可知  $q$  是假命题, 即  $p$ ,  $\neg q$  均是真命题, 故选 B.

(4) 已知  $x, y$  满足  $\begin{cases} x - y + 3 \leq 0 \\ 3x + y + 5 \leq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = x + 2y$  的最大值是

- (A) 0      (B) 2      (C) 5      (D) 6

【答案】C

【解析】由  $\begin{cases} x - y + 3 \leq 0 \\ 3x + y + 5 \leq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$  画出可行域及直线  $x + 2y = 0$  如图所示, 平移  $x + 2y = 0$  发现,



当其经过直线  $3x + y + 5 = 0$  与  $x = -3$  的交点  $(-3, 4)$  时,  $z = x + 2y$  最大为

$$z = -3 + 2 \times 4 = 5, \text{ 选 C.}$$

(5) 为了研究某班学生的脚长  $x$  (单位: 厘米) 和身高  $y$  (单位: 厘米) 的关系, 从该班随机抽取 10 名学生, 根据测量数据的散点图可以看出  $y$  与  $x$  之间有线性相关关系, 设其回

归直线方程为  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ . 已知  $\sum_{i=1}^{10} x_i = 225$ ,  $\sum_{i=1}^{10} y_i = 1600$ ,  $\hat{b} = 4$ . 该班某学生的脚长为

24, 据此估计其身高为

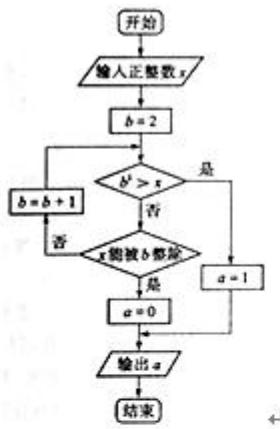
- (A) 160                          (B) 163                          (C) 166                          (D)  
170

【答案】C.

【解析】 $\bar{x} = 22.5, \bar{y} = 160, \therefore \hat{a} = 160 - 4 \times 22.5 = 70, \hat{y} = 4 \times 24 + 70 = 166$ , 选 C.

(6) 执行学科#网两次右图所示的程序框图, 若第一次输入的  $x$  的值为 7, 第二次输入的  $x$  的值为 9, 则第一次、第二次输出的  $a$  的值分别为

- (A) 0, 0                          (B) 1, 1                          (C) 0, 1                          (D) 1, 0



【答案】D

【解析】第一次  $x=7, 2^2 < 7, b=3, 3^2 > 7, a=1$ ；第二次  $x=9, 2^2 < 9, b=3, 3^2 = 9, a=0$ ，

选 D.

(7) 若  $a > b > 0$ ，且  $ab=1$ ，则下列不等式成立的是

$$(A) a + \frac{1}{b} < \frac{b}{2^a} < \log_2(a+b) \quad (B) \frac{b}{2^a} < \log_2(a+b) < a + \frac{1}{b}$$

$$(C) a + \frac{1}{b} < \log_2(a+b) < \frac{b}{2^a} \quad (D) \log_2(a+b) < a + \frac{1}{b} < \frac{b}{2^a}$$

【答案】B

【解析】 $a > 1, 0 < b < 1, \therefore \frac{b}{2^a} < 1, \log_2(a+b) > \log_2 2\sqrt{ab} = 1,$

$$2^{a+\frac{1}{b}} > a + \frac{1}{b} > a + b \Rightarrow a + \frac{1}{b} > \log_2(a+b)，\text{ 所以选 B.}$$

(8) 从分别标有1, 2, …, 9的9张卡片中不放回地随机抽取2次，每次抽取1张。则抽到的2张卡片上的数奇偶性不同的概率是

$$(A) \frac{5}{18} \quad (B) \frac{4}{9} \quad (C) \frac{5}{9} \quad (D) \frac{7}{9}$$

【答案】C

$$\text{【解析】} \frac{2C_5^1 C_4^2}{9 \times 8} = \frac{5}{9}，\text{ 选 C.}$$

(9) 在 $\triangle ABC$ 中，角A，B，C的对边分别为a，b，c。若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且满足

$\sin B(1+2\cos C)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$ ，则下列等式成立的是<sup>④</sup>

- (A)  $a=2b$       (B)  $b=2a$       (C)  $A=2B$       (D)  $B=2A$  <sup>④</sup>

【答案】A <sup>④</sup>

【解析】 $\sin(A+C)+2\sin B\cos C=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$  <sup>④</sup>

所以  $2\sin B\cos C=\sin A\cos C \Rightarrow 2\sin B=\sin A \Rightarrow 2b=a$ ，选 A. <sup>④</sup>

(10) 已知当  $x \in [0,1]$  时，函数  $y=(mx-1)^2$  的图象与  $y=\sqrt{x}+m$  的图象有且只有一个交点，则正实数  $m$  的取值范围是<sup>④</sup>

- |  |   |
|--|---|
| (A) $(0,1] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$        | (B) $(0,1] \cup [3, +\infty)$ <sup>④</sup>        |
| (C) $(0,\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$ | (D) $(0,\sqrt{2}] \cup [3, +\infty)$ <sup>④</sup> |

【答案】B <sup>④</sup>

【解析】当  $0 < m \leq 1$  时， $\frac{1}{m} \geq 1$ ， $y=(mx-1)^2$  单调递减，且  $y=(mx-1)^2 \in [(m-1)^2, 1]$ ， $y=\sqrt{x}+m$  单调递增，且  $y=\sqrt{x}+m \in [m, 1+m]$ ，此时有且仅有一个交点；当  $m > 1$  时， $0 < \frac{1}{m} < 1$ ， $y=(mx-1)^2$  在  $[\frac{1}{m}, 1]$  上单调递增，所以要有且仅有一个交点，需  $(m-1)^2 \geq 1+m \Rightarrow m \geq 3$  选 B.

## 二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分<sup>④</sup>

(11) 已知  $(1+3x)^n$  的展开式中含有  $x^2$  项的系数是 54，则  $n=$  \_\_\_\_\_ <sup>④</sup>

【答案】4 <sup>④</sup>

【解析】 $T_{r+1}=C_n^r(3x)^r=C_n^r \cdot 3^r \cdot x^r$ ，令  $r=2$  得： $C_n^2 \cdot 3^2 = 54$ ，解得  $n=4$ . <sup>④</sup>

(12) 已知  $e_1, e_2$  是互相垂直的单位向量，若  $\sqrt{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2$  与  $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$  的夹角为  $60^\circ$ ，则实数  $\lambda$  的值是\_\_\_\_\_  

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$  <sup>④</sup>

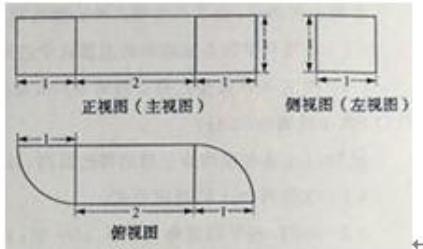
【解析】 $(\sqrt{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2) = \sqrt{3}\vec{e}_1^2 + \sqrt{3}\lambda\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - \lambda\vec{e}_2^2 = \sqrt{3} - \lambda$ ，<sup>④</sup>

$$|\sqrt{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2| = \sqrt{(\sqrt{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2)^2} = \sqrt{3\vec{e}_1^2 - 2\sqrt{3}\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2^2} = 2$$

$$|\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2| = \sqrt{(\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2)^2} = \sqrt{\vec{e}_1^2 + 2\lambda\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \lambda^2\vec{e}_2^2} = \sqrt{1 + \lambda^2}$$

$$\therefore \sqrt{3} - \lambda = 2 \times \sqrt{1 + \lambda^2} \times \cos 60^\circ = \sqrt{1 + \lambda^2}, \text{ 解得: } \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(13)由一个长方体和两个 $\frac{1}{4}$ 圆柱体构成的几何体的三视图如右图,则该几何体的体积为\_\_\_\_\_.



【答案】 $2 + \frac{\pi}{2}$

【解析】该几何体的体积为  $V = \frac{1}{4}\pi \times 1^2 \times 1 \times 2 + 2 \times 1 \times 1 = \frac{\pi}{2} + 2$ .

(14) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右支与焦点为  $F$  的抛物

线  $x^2 = 2px (p > 0)$  交于  $A, B$  两点, 若  $|AF| + |BF| = 4|OF|$ , 则该双曲线的渐近线方程为\_\_\_\_\_.

【答案】 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

【解析】 $|AF| + |BF| = y_A + \frac{p}{2} + y_B + \frac{p}{2} = 4 \times \frac{p}{2} \Rightarrow y_A + y_B = p$ ,

因为  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x^2 = 2py \end{cases} \Rightarrow a^2 y^2 - 2pb^2 y + a^2 b^2 = 0 \Rightarrow$ , 所以  $y_A + y_B = \frac{2pb^2}{a^2} = p \Rightarrow a = \sqrt{2}b \Rightarrow$  渐近线方程

为  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ .

(15) 若函数  $e^x f(x)$  ( $e = 2.71828\cdots$  是自然对数的底数) 在  $f(x)$  的定义域上单调递增, 则

称函数  $f(x)$  具有  $M$  性质. 下列函数中所有具有  $M$  性质的函数的序号为\_\_\_\_\_.

①  $f(x) = 2^{-x}$     ②  $f(x) = 3^{-x}$     ③  $f(x) = x^3$     ④  $f(x) = x^2 + 2$

【答案】①④

【解析】①  $e^x f(x) = e^x \cdot 2^{-x} = \left(\frac{e}{2}\right)^x$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增, 故  $f(x) = 2^{-x}$  具有  $M$  性质;

②  $e^x f(x) = e^x \cdot 3^{-x} = \left(\frac{e}{3}\right)^x$  在  $\mathbb{R}$  上单调递减，故  $f(x) = 3^{-x}$  不具有 M 性质。←

③  $e^x f(x) = e^x \cdot x^3$ ，令  $g(x) = e^x \cdot x^3$ ，则  $g'(x) = e^x \cdot x^3 + e^x \cdot 3x^2 = x^2 e^x (x+2)$ ， $\therefore$  当  $x > -2$  时， $g'(x) > 0$ ，当  $x < -2$  时， $g'(x) < 0$ ， $\therefore e^x f(x) = e^x \cdot x^3$  在  $(-\infty, -2)$  上单调递减，在  $(-2, +\infty)$  上单调递增，故  $f(x) = x^3$  不具有 M 性质。←

④  $e^x f(x) = e^x (x^2 + 2)$ ，令  $g(x) = e^x (x^2 + 2)$ ，则  $g'(x) = e^x (x^2 + 2) + e^x \cdot 2x = e^x [(x+1)^2 + 1] > 0$ ， $\therefore e^x f(x) = e^x (x^2 + 2)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增，故  $f(x) = x^2 + 2$  具有 M 性质。←

### 三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。←

16. 设函数  $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) + \sin(\omega x - \frac{\pi}{2})$ ，其中  $0 < \omega < 3$ . 已知  $f(\frac{\pi}{6}) = 0$ . ←

(I) 求  $\omega$ ；←

(II) 将函数  $y = f(x)$  的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍（纵坐标不变），再将得到的图象向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位，得到函数  $y = g(x)$  的图象，求  $g(x)$  在  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$  上的最小值。←

【答案】(I)  $\omega = 2$ . (II) 得最小值  $-\frac{3}{2}$ .

【解析】解：(1) 因为  $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) + \sin(\omega x - \frac{\pi}{2})$ ，

$$\text{所以 } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} \cos \omega x - \cos \omega x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{3}{2} \cos \omega x$$

$$= \sqrt{3} \left( \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega x \right)$$

$$= \sqrt{3} \left( \sin \omega x - \frac{\pi}{3} \right)$$

由题设知  $f(\frac{\pi}{6}) = 0$ ，

$$\text{所以 } \frac{\omega \pi}{6} = \frac{\pi}{3} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

故  $\omega = 6k+2, \quad k \in \mathbb{Z}$ ，又  $0 < \omega < 3$ ，

所以  $\omega = 2$ .

(II) 由(I)得  $f(x) = \sqrt{3} \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

$$\text{所以 } g(x) = \sqrt{3} \sin(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} \sin(x - \frac{\pi}{12}).$$

因为  $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ，

所以  $x - \frac{\pi}{12} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ ，

当  $x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3}$ ，

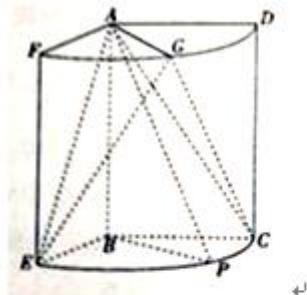
即  $x = -\frac{\pi}{4}$  时， $g(x)$  取得最小值  $-\frac{3}{2}$ .

17. 如图，几何体是圆柱的一部分，它是由矩形  $ABCD$  (及其内部)以  $AB$  边所在直线为旋

转轴旋转  $120^\circ$  得到的， $G$  是  $\overline{DF}$  的中点. 学 xxx7 科网

(I) 设  $P$  是  $\overline{CE}$  上的一点，且  $AP \perp BE$ ，求  $\angle CBP$  的大小；

(II) 当  $AB = 3$ ， $AD = 2$ ，求二面角  $E-AG-C$  的大小.



【答案】( I )  $\angle CBP = 30^\circ$ . ( II )  $60^\circ$ .

【解析】解：( I ) 因为  $AP \perp BE$ ,  $AB \perp BE$ ,  $\therefore$

$AB$ ,  $AP \subset$ 平面  $ABP$ ,  $AB \cap AP = A$ ,  $\therefore$

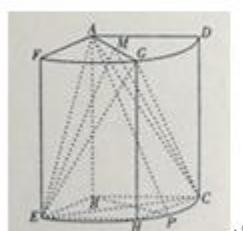
所以  $BE \perp$ 平面  $ABP$ ,  $\therefore$

又  $BP \subset$ 平面  $ABP$ ,  $\therefore$

所以  $BE \perp BP$ , 又  $\angle EBC = 120^\circ$ ,  $\therefore$

因此  $\angle CBP = 30^\circ$ .

( II ) 解法一： $\therefore$



取  $\overline{EC}$  的中点  $H$ , 连接  $EH$ ,  $GH$ ,  $CH$ .

因为  $\angle EBC = 120^\circ$ ,

所以四边形  $BEC$  为菱形,

所以  $AE = GE = AC = GC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ .

取  $AG$  中点  $M$ ，连接  $EM$ ， $CM$ ， $EC$ .

则  $EM \perp AG$ ， $CM \perp AG$ ，

所以  $\angle EMC$  为所求二面角的平面角.

又  $AM = 1$ ，所以  $EM = CM = \sqrt{13 - 1} = 2\sqrt{3}$ .

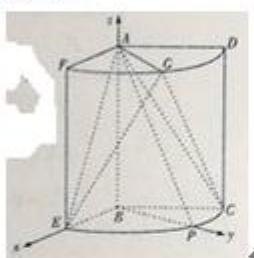
在  $\triangle BEC$  中，由于  $\angle EBC = 120^\circ$ ，

由余弦定理得  $EC^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos 120^\circ = 12$ ，

所以  $EC = 2\sqrt{3}$ ，因此  $\triangle EMC$  为等边三角形，

故所求的角为  $60^\circ$ .

解法二：



以  $B$  为坐标原点，分别以  $BE$ ， $BP$ ， $BA$  所在的直线为  $x$ ， $y$ ， $z$  轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

由题意得  $A(0, 0, 3)$ ， $E(2, 0, 0)$ ， $G(1, \sqrt{3}, 3)$ ， $C(-1, \sqrt{3}, 0)$ ，故  $\overrightarrow{AE} = (2, 0, -3)$ ，

$\overrightarrow{AG} = (1, \sqrt{3}, 0)$ ， $\overrightarrow{CG} = (2, 0, 3)$ ，

设  $m = (x_1, y_1, z_1)$  是平面  $AEG$  的一个法向量.

由  $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \end{cases}$  可得  $\begin{cases} 2x_1 - 3z_1 = 0, \\ x_1 + \sqrt{3}y_1 = 0, \end{cases}$

取  $z_1 = 2$ ，可得平面  $AEG$  的一个法向量  $m(3, -\sqrt{3}, 2)$ .

设  $n = (x_2, y_2, z_2)$  是平面  $ACG$  的一个法向量.

由  $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{CG} = 0 \end{cases}$  可得  $\begin{cases} x_2 + \sqrt{3}y_2 = 0, \\ 2x_2 + 3z_2 = 0, \end{cases}$

取  $z_2 = -2$ ，可得平面  $ACG$  的一个法向量  $n(3, -\sqrt{3}, -2)$ .

$$\text{所以 } \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| \cdot |n|} = \frac{1}{2}$$

因此所求的角为  $60^\circ$ .

(18) (本小题满分 12 分) 在心理学研究中, 常采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响, 具体方法如下: 将参加试验的志愿者随机分成两组, 一组接受甲种心理暗示, 另一组接受乙种心理暗示, 通过对这两组志愿者接受心理暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用, 现有 6 名男志愿者  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  和 4 名  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , 从中随机抽取 5 人接受甲种心理暗示, 另 5 人接受乙种心理暗示.

(I) 求接受甲种心理暗示的志愿者中包含  $A_1$  但不包含  $B_3$  的频率.

(II) 用  $X$  表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数, 求  $X$  的分布列与数学期望  $EX$ .

【答案】(I)  $\frac{5}{18}$  (II)  $X$  的分布列为

$X=0$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$
$P=$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

∴

$X$  的数学期望是  $EX = 2$ .

【解析】解: (I) 记接受甲种心理暗示的志愿者中包含  $A_1$  但不包含  $B_3$  的事件为  $M$ , 则

$$P(M) = \frac{C_5^4}{C_{10}^5} = \frac{5}{18}$$

(II) 由题意知  $X$  可取的值为: 0, 1, 2, 3, 4. 则

$$P(X=0) = \frac{C_6^5}{C_{10}^5} = \frac{1}{42},$$

$$P(X=1) = \frac{C_6^4 C_4^1}{C_{10}^5} = \frac{5}{21},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^3 C_4^2}{C_{10}^5} = \frac{10}{21},$$

$$P(X=3) = \frac{C_6^2 C_4^3}{C_{10}^5} = \frac{5}{21},$$

$$P(X=4) = \frac{C_6^1 C_4^4}{C_{10}^5} = \frac{1}{42},$$

因此 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

∴

X 的数学期望是

$$EX = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3) + 4 \times P(X=4) =$$

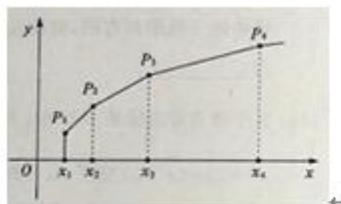
$$0 \times \frac{1}{42} + 1 \times \frac{5}{21} + 2 \times \frac{10}{21} + 3 \times \frac{5}{21} + 4 \times \frac{1}{42} = 2.$$

(19) (本小题满分 12 分)

已知  $\{x_n\}$  是各项均为正数的等比数列，且  $x_1+x_2=3$ ,  $x_2 \cdot x_3=2$

(I) 求数列  $\{x_n\}$  的通项公式；

(II) 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，依次连接点  $P_1(x_1, 1)$ ,  $P_2(x_2, 2)$ , ...,  $P_{n-1}(x_{n-1}, n+1)$  得到折线  $P_1P_2 \dots P_{n-1}$ ，求由该折线与直线  $y=0$ ,  $x=x_i$  ( $x \in \{x_n\}$ ) 所围成的区域的面积  $T_n$ .



【答案】(I)  $x_n = 2^{n-1}$ . (II)  $T_n = \frac{(2n-1) \times 2^n + 1}{2}$ .

∴

【解析】解：(I) 设数列  $\{x_n\}$  的公比为  $q$ ，由已知  $q > 0$ .

由题意得  $\begin{cases} x_1 + x_1 q = 3 \\ x_1 q^2 - x_1 q = 2 \end{cases}$ ，所以  $3q^2 - 5q - 2 = 0$ ，

因为  $q > 0$ ，所以  $q = 2$ ,  $x_1 = 1$ .

因此数列  $\{x_n\}$  的通项公式为  $x_n = 2^{n-1}$ .

(II) 过  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n+1}$  向  $x$  轴作垂线，垂足分别为  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{n+1}$ ，

由(I)得  $x_{n+1} - x_n = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ 。

记梯形  $P_n P_{n+1} Q_{n+1} Q_n$  的面积为  $b_n$ 。

由题意  $b_n = \frac{(n+n+1)}{2} \times 2^{n-1} = (2n+1) \times 2^{n-2}$ ，

所以

$$T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \\ = 3 \times 2^{-1} + 5 \times 2^0 + 7 \times 2^1 + \dots + (2n-1) \times 2^{n-3} + (2n+1) \times 2^{n-2} \quad ①$$

$$\text{又 } 2T_n = 3 \times 2^0 + 5 \times 2^1 + 7 \times 2^2 + \dots + (2n-1) \times 2^{n-2} + (2n+1) \times 2^{n-1} \quad ②$$

①-②得

$$-T_n = 3 \times 2^{-1} + (2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - (2n+1) \times 2^{n-1} = \frac{3}{2} + \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n+1) \times 2^{n-1}.$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{(2n-1) \times 2^n + 1}{2}.$$

(20) (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = x^2 + 2\cos x$ ,  $g(x) = e^x (\cos x - \sin x + 2x - 2)$ , 其中  $e = 2.71828\dots$  是自然对数的底数。

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(\pi, f(\pi))$  处的切线方程；

(II) 令  $h(x) = g(x) - af(x)$  ( $a \in R$ )，讨论  $h(x)$  的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值。

【答案】(I)  $y = 2\pi x - \pi^2 - 2$

(II) 综上所述：

当  $a \leq 0$  时， $h(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减，在  $(0, +\infty)$  上单调递增；

函数  $h(x)$  有极小值，极小值是  $h(0) = -2\alpha - 1$ ；<sup>④</sup>

当  $0 < \alpha < 1$  时，函数  $h(x)$  在  $(-\infty, \ln \alpha)$  和  $(0, \ln \alpha)$  和  $(0, +\infty)$  上单调递增，在  $(\ln \alpha, 0)$  上单调递减，函数  $h(x)$  有极大值，也有极小值，<sup>⑤</sup>

极大值是  $h(\ln \alpha) = -\alpha [\ln^2 \alpha - 2\ln \alpha + \sin(\ln \alpha) + \cos(\ln \alpha) + 2]$ ；<sup>⑥</sup>

极小值是  $h(0) = -2\alpha - 1$ ；<sup>⑦</sup>

当  $\alpha = 1$  时，函数  $h(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增，无极值；<sup>⑧</sup>

当  $\alpha > 1$  时，函数  $h(x)$  在  $(-\infty, 0)$  和  $(\ln \alpha, +\infty)$  上单调递增，<sup>⑨</sup>

在  $(0, \ln \alpha)$  上单调递减，函数  $h(x)$  有极大值，也有极小值，<sup>⑩</sup>

极大值是  $h(0) = -2\alpha - 1$ ；<sup>⑪</sup>

极小值是  $h(\ln \alpha) = -\alpha [\ln^2 \alpha - 2\ln \alpha + \sin(\ln \alpha) + \cos(\ln \alpha) + 2]$ 。<sup>⑫</sup>

【解析】解：( I ) 由题意  $f(\pi) = \pi^2 - 2$ ；<sup>⑬</sup>

又  $f'(x) = 2x - 2 \sin x$ ，<sup>⑭</sup>

所以  $f'(\pi) = 2\pi$ ，<sup>⑮</sup>

因此 曲线  $y = f(x)$  在点  $(\pi, f(\pi))$  处的切线方程为<sup>⑯</sup>

$$y - (\pi^2 - 2) = 2\pi(x - \pi)；<sup>⑰</sup>$$

$$\text{即 } y = 2\pi x - \pi^2 - 2。<sup>⑱</sup>$$

( II ) 由题意得  $h(x) = e^x (\cos x - \sin x + 2x - 2) - \alpha(x^2 + 2 \cos x)$ ，<sup>⑲</sup>

$$\text{因为 } h'(x) = e^x (\cos x - \sin x + 2x - 2) + e^x (-\sin x - \cos x + 2) - \alpha(2x - 2 \sin x)$$

$$= 2e^x (x - \sin x) - 2\alpha(x - \sin x)$$

$$= 2(e^x - \alpha)(x - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow m(x) = x - \sin x$$

$$\text{则 } m'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

所以  $m(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增.

所以 当  $x > 0$  时,  $m(x)$  单调递减,

当  $x > 0$  时,  $m(x) < 0$

(1) 当  $\alpha \leq 0$  时,  $e^x - \alpha > 0$

当  $x < 0$  时,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减,

当  $x > 0$  时,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增,

所以 当  $x = 0$  时  $h(x)$  取得极小值, 极小值是  $h(0) = -2\alpha - 1$ ;

(2) 当  $\alpha > 0$  时,  $h'(x) = 2(e^x - e^{\ln \alpha})(x - \sin x)$

由  $h'(x) = 0$  得  $x_1 = \ln \alpha$ ,  $x_2 = 0$

① 当  $0 < \alpha < 1$  时,  $\ln \alpha < 0$ ,

当  $x \in (-\infty, \ln \alpha)$  时,  $e^x - e^{\ln \alpha} < 0$ ,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增;

当  $x \in (\ln \alpha, 0)$  时,  $e^x - e^{\ln \alpha} > 0, h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减;  $\leftarrow$

当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $e^x - e^{\ln \alpha} > 0, h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增.  $\leftarrow$

所以 当  $x = \ln \alpha$  时  $h(x)$  取得极大值.  $\leftarrow$

极大值为  $h(\ln \alpha) = -\alpha [\ln^2 \alpha - 2\ln \alpha + \sin(\ln \alpha) + \cos(\ln \alpha) + 2]$ ,  $\leftarrow$

当  $x = 0$  时  $h(x)$  取到极小值, 极小值是  $h(0) = -2\alpha - 1$ ;  $\leftarrow$

②当  $\alpha = 1$  时,  $\ln \alpha = 0$ ,  $\leftarrow$

所以 当  $x \in (-\infty, +\infty)$  时,  $h'(x) \geq 0$ , 函数  $h(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增, 无极值;  $\leftarrow$

③当  $\alpha > 1$  时,  $\ln \alpha > 0$

所以 当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $e^x - e^{\ln \alpha} < 0$ ,  $h'(x) > 0, h(x)$  单调递增;

当  $x \in (0, \ln \alpha)$  时,  $e^x - e^{\ln \alpha} < 0$ ,  $h'(x) < 0, h(x)$  单调递减;

当  $x \in (\ln \alpha, +\infty)$  时,  $e^x - e^{\ln \alpha} > 0$ ,  $h'(x) > 0, h(x)$  单调递增;

所以 当  $x = 0$  时  $h(x)$  取得极大值, 极大值是  $h(0) = -2\alpha - 1$ ;

当  $x = \ln \alpha$  时  $h(x)$  取得极小值.

$\leftarrow$

极小值是  $h(\ln \alpha) = -\alpha [\ln^2 \alpha - 2\ln \alpha + \sin(\ln \alpha) + \cos(\ln \alpha) + 2]$ .  $\leftarrow$

综上所述:  $\leftarrow$

当  $\alpha \leq 0$  时,  $h(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增,  $\leftarrow$

函数  $h(x)$  有极小值，极小值是  $h(0) = -2\alpha - 1$ ； $\leftarrow$

当  $0 < \alpha < 1$  时，函数  $h(x)$  在  $(-\infty, \ln \alpha)$  和  $(0, \ln \alpha)$  和  $(0, +\infty)$  上单调递增，在  $(\ln \alpha, 0)$  上单调递减，函数  $h(x)$  有极大值，也有极小值， $\leftarrow$

极大值是  $h(\ln \alpha) = -\alpha [\ln^2 \alpha - 2\ln \alpha + \sin(\ln \alpha) + \cos(\ln \alpha) + 2]$ ， $\leftarrow$

极小值是  $h(0) = -2\alpha - 1$ ； $\leftarrow$

当  $\alpha = 1$  时，函数  $h(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增，无极值； $\leftarrow$

当  $\alpha > 1$  时，函数  $h(x)$  在  $(-\infty, 0)$  和  $(\ln \alpha, +\infty)$  上单调递增， $\leftarrow$

在  $(0, \ln \alpha)$  上单调递减，函数  $h(x)$  有极大值，也有极小值， $\leftarrow$

极大值是  $h(0) = -2\alpha - 1$ ； $\leftarrow$

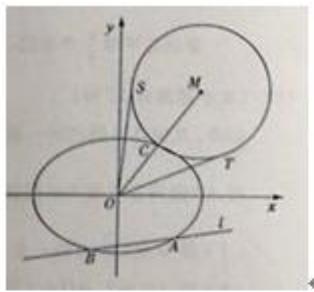
极小值是  $h(\ln \alpha) = -\alpha [\ln^2 \alpha - 2\ln \alpha + \sin(\ln \alpha) + \cos(\ln \alpha) + 2]$ 。 $\leftarrow$

(21) (本小题满分 13 分)  $\leftarrow$

在平面直角坐标系  $xOy$  中，椭圆  $E$ ： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，焦距为 2。 $\leftarrow$

(I) 求椭圆  $E$  的方程； $\leftarrow$

(II) 如图，动直线  $l$ ： $y = k_1 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$  交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点， $C$  是椭圆  $E$  上一点，直线  $OC$  的斜率为  $k_2$ ，且  $k_1 k_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ， $M$  是线段  $OC$  延长线上一点，且  $|MC| : |AB| = 2 : 3$ ， $\square M$  的半径为  $|MC|$ ， $OS, OT$  是  $\square M$  的两条切线，切点分别为  $S, T$ ，求  $\angle SOT$  的最大值，并求取得最大值时直线  $l$  的斜率。 $\leftarrow$



【答案】(I)  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

(II)  $\angle SOT$  的最大值为  $\frac{\pi}{3}$ ，取得最大值时直线  $l$  的斜率为  $k_l = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】解：(I) 由题意知  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $2c = 2$ ,

所以  $a = \sqrt{2}, b = 1$ ,

因此 椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

(II) 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ y = k_l x - \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

得  $(4k_l^2 + 2)x^2 - 4\sqrt{3}k_l x - 1 = 0$ ,

由题意知  $\Delta > 0$ ,

$$\text{且 } x_1 + x_2 = \frac{2\sqrt{3}k_l}{2k_l^2 + 1}, x_1 x_2 = -\frac{1}{2(2k_l^2 + 1)},$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1+k_l^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \frac{\sqrt{1+k_l^2} \sqrt{1+8k_l^2}}{2k_l^2 + 1}$$

$$\text{由题意知 } k_l k_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

所以  $k_2 = \frac{\sqrt{2}}{4k_1}$

由此直线  $OC$  的方程为  $y = \frac{\sqrt{2}}{4k_1}x$

联立方程  $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{4k_1}x, \end{cases}$

得  $x^2 = \frac{8k_1^2}{1+4k_1^2}, y^2 = \frac{1}{1+4k_1^2}$

因此  $|OC| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1+8k_1^2}{1+4k_1^2}}$

由题意可知  $\sin \frac{\angle SOT}{2} = \frac{r}{r+|OC|} = \frac{1}{1+\frac{|OC|}{r}}$

而  $\frac{|OC|}{r} = \frac{\sqrt{\frac{1+8k_1^2}{1+4k_1^2}}}{\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+8k_1^2}}{2k_1^2+1}}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{1+2k_1^2}{\sqrt{1+4k_1^2}\sqrt{1+k_1^2}}$

令  $t = 1+2k_1^2$

则  $t > 1, \frac{1}{t} \in (0,1)$

因此  $\frac{|OC|}{r} = \frac{3}{2} \frac{t}{\sqrt{2t^2+t-1}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}} \geq 1$

当且仅当  $\frac{1}{t} = \frac{1}{2}$ ，即  $t = 2$  时等号成立，此时  $k_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，  
所以  $\sin \frac{\angle SOT}{2} \leq \frac{1}{2}$ ，  
因此  $\frac{\angle SOT}{2} \leq \frac{\pi}{6}$ ，  
所以  $\angle SOT$  最大值为  $\frac{\pi}{3}$ 。

综上所述： $\angle SOT$  的最大值为  $\frac{\pi}{3}$ ，取得最大值时直线  $L$  的斜率为  $k_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。  
