

2017年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

文科数学

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合 $M = \{x \mid |x-1| < 1\}$, $N = \{x \mid x < 2\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $(-1, 1)$ B. $(-1, 2)$ C. $(0, 2)$ D. $(1, 2)$

【答案】C

【解析】由 $|x-1| < 1$ 得 $0 < x < 2$, 故 $M \cap N = \{x \mid 0 < x < 2\} \cap \{x \mid x < 2\} = \{x \mid 0 < x < 2\}$,

选C.

(2) 已知 i 是虚数单位，若复数满足 $zi = 1+i$, 则 $z^2 =$

- A. $-2i$ B. $2i$ C. -2 D. 2

【答案】A

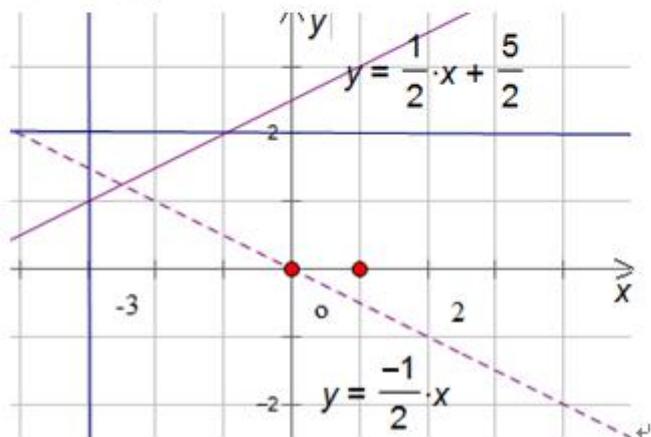
【解析】由 $zi = 1+i$ 得 $(zi)^2 = (1+i)^2$, 即 $-z^2 = 2i$, 故 $z^2 = -2i$, 选A.

(3) 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y+5 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值是

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

【答案】D

【解析】由 $\begin{cases} x-2y+5 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$ 画出可行域及直线 $x+2y=0$ 如图所示，平移 $x+2y=0$ 发现，



当其经过直线 $x-2y+5=0$ 与 $y=2$ 的交点 $(-1,2)$ 时， $z=x+2y$ 最大为 $z=-1+2 \times 2=3$ ，

选 D. ↵

(4) 已知 $\cos x = \frac{3}{4}$ ，则 $\cos 2x =$ ↵

(A) $-\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{8}$ ↵

【答案】D ↵

【解析】由 $\cos x = \frac{3}{4}$ 得 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \times (\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$ ，故选 D. ↵

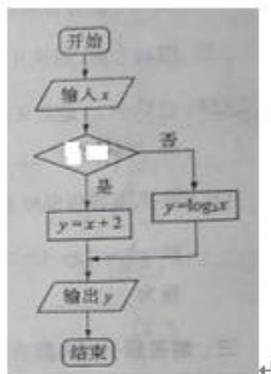
(5) 已知命题 $p: \exists x \in R, x^2 - x + 1 \geq 0$ ；命题 q ：若 $a^2 < b^2$ ，则 $a < b$ 。下列命题为真命题的是 ↵

(A) $p \wedge q$ (B) $p \wedge \neg q$ (C) $\neg p \wedge q$ (D) $\neg p \wedge \neg q$ ↵

【答案】B ↵

【解析】由 $x=0$ 时 $x^2 - x + 1 \geq 0$ 成立知 p 是真命题，由 $1^2 < 2^2, 1^2 < (-2)^2$ 可知 q 是假命题，故选 B. ↵

(6) 执行右侧的程序框图，当输入的 x 值时，输出的 y 的值为 2，则空白判断框中的条件可能为 ↵



(A) $x > 3$ (B) $x > 4$ (C) $x \leq 4$ (D) $x \leq 5$ ↵

【答案】B ↵

【解析】输入 x 为 4，要想输出 y 为 2，则程序经过 $y = \log_2 4 = 2$ ，故判断框填 $x > 4$ ，选 B. ↵

(7) 函数 $y = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$ 最小正周期为 ↵

- A $\frac{\pi}{2}$ B $\frac{2\pi}{3}$ C π D 2π

【答案】C

【解析】由题意 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ，其周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，故选 C。

(8) 如图所示的茎叶图记录了甲乙两组各 5 名工人某日的产量数据 (单位: 件)。若这两组数据的中位数相等, 且平均值也相等, 则 x 和 y 的值分别为

- A 3, 5 B 5, 5 C 3, 7 D 5, 7

甲组		乙组	
6	5	9	
2 5	6	1 7	y
x 4	7	8	

【答案】A

【解析】由题意, 甲组数据为 56, 62, 65, 70 + x , 74, 乙组数据为 59, 61, 67, 60 + y ,

78. 要使两组数据中位数相等, 有 $65 = 60 + y$, 所以 $y = 5$, 又平均数相同, 则

$$\frac{56 + 62 + 65 + (70 + x) + 74}{5} = \frac{59 + 61 + 67 + 65 + 78}{5}, \text{ 解得 } x = 3. \text{ 故选 A.}$$

(9) 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 < x < 1 \\ 2(x-1), & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f(a) = f(a+1)$, 则 $f\left(\frac{1}{a}\right) =$

- A 2 B 4 C 6 D 8

【答案】C

【解析】由 $f(a) = f(a+1)$ 得 $\sqrt{a} = 2(a+1-1)$, 解得 $a = \frac{1}{4}$, 则 $f\left(\frac{1}{a}\right) = f(4) = 2(4-1) = 6$,

故选 C.

(10) 若函数 $e^x f(x)$ ($e = 2.71828? \dots$ 是自然对数的底数) 在 $f(x)$ 的定义域上单调递增, 则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质, 下列函数中具有 M 性质的是

A $f(x) = 2^{-x}$

B $f(x) = x^2$

C $f(x) = 3^x$

D $f(x) = \cos x$

【答案】A

【解析】由A, 令 $g(x) = e^x \cdot 2^{-x}$, $g'(x) = e^x(2^{-x} + 2^{-x} \ln \frac{1}{2}) = e^x 2^{-x}(1 + \ln \frac{1}{2}) > 0$, 则 $g(x)$ 在 \mathbb{R} 上单增, $f(x)$ 具有 π 性质, 故选 A.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分

(11) 已知向量 $\mathbf{a} = (2, 6)$, $\mathbf{b} = (-1, \lambda)$, 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $\lambda =$ _____.

【答案】-3

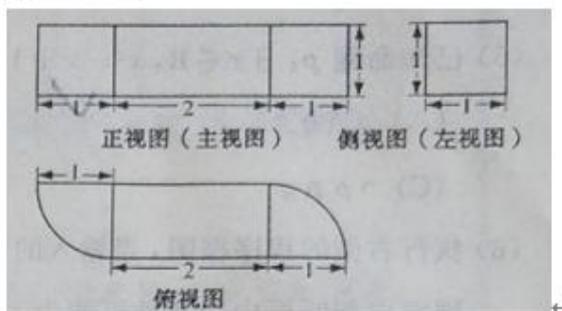
【解析】 $-6 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -3$.

(12) 若直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $(1, 2)$, 则 $2a + b$ 的最小值为 _____.

【答案】8

【解析】 $\because \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \therefore 2a + b = (2a + b)(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}) = 4 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 4 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} = 8$

(13) 由一个长方体和两个 $\frac{1}{4}$ 圆柱构成的几何体的三视图如图，则该几何体的体积为 _____.



【答案】 $2 + \frac{\pi}{2}$

【解析】 $V = 2 \times 1 \times 1 + 2 \times \frac{\pi \cdot 1^2}{4} \times 1 = 2 + \frac{\pi}{2}$

(14) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且 $f(x+4) = f(x-2)$. 若当 $x \in [-3, 0]$ 时, $f(x) = 6^{-x}$,

则 $f(919) =$ _____.

【答案】6

【解析】 $\because T=6 \therefore f(919)=f(1)=f(-1)=6$ \leftarrow

(15) 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2 = 2py (p>0)$ 交于 A, B 两点，若 $|AF| + |BF| = 4|OF|$ ，则该双曲线的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ \leftarrow

【答案】 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ \leftarrow

【解析】 $|AF| + |BF| = y_A + \frac{p}{2} + y_B + \frac{p}{2} = 4 \times \frac{p}{2} \Rightarrow y_A + y_B = p$ \leftarrow

因为 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x^2 = 2py \end{cases} \Rightarrow a^2y^2 - 2pb^2y + a^2b^2 = 0 \Rightarrow$ ，所以 $y_A + y_B = \frac{2pb^2}{a^2} = p \Rightarrow a = \sqrt{2}b \Rightarrow$ 渐近线方程

为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ \leftarrow

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。 \leftarrow

(16) (本小题满分 12 分) \leftarrow

某旅游爱好者计划从 3 个亚洲国家 A_1, A_2, A_3 和 3 个欧洲国家 B_1, B_2, B_3 中选择 2 个国家去旅游。 \leftarrow

(I) 若从这 6 个国家中任选 2 个，求这 2 个国家都是亚洲国家的概率； \leftarrow

(II) 若从亚洲国家和欧洲国家中个任选 1 个，求这 2 个国家包括 A_1 但不包括 B_1 的概率。 \leftarrow

【答案】 (1) $\frac{1}{5}$ ；(2) $\frac{2}{9}$ \leftarrow

【解析】 (1) $p = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ \leftarrow

(2) $P = \frac{C_1^1 C_2^1}{C_3^1 C_3^1} = \frac{2}{9}$ \leftarrow

(17) (本小题满分 12 分) \leftarrow

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $b=3$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6$ ， $S_{\triangle ABC} = 3$ ，求 A 和 a 。 \leftarrow

【答案】 $A = \frac{3}{4}\pi$ ， $a = \sqrt{29}$ \leftarrow

【解析】 因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6$ ，所以 $bc \cos A = -6$ \leftarrow

因为 $S_{\triangle ABC} = 3$ ，所以 $\frac{1}{2}bc \sin A = 3$ ， \leftarrow

又因为 $b = 3$ ，所以 $\begin{cases} 3c \cos A = -6 \\ \frac{1}{2} \times 3c \sin A = 3 \end{cases}$ ， \leftarrow

所以 $\frac{1}{2} \tan A = -\frac{1}{2}$ ，所以 $\tan A = -1$ ， \leftarrow

因为 $A \in (0, \pi)$ ，所以 $A = \frac{3\pi}{4}$ ，所以 $3 \cdot c \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6$ ，所以 $c = 2\sqrt{2}$ ， \leftarrow

所以 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 9 + 8 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 29$ ， \leftarrow

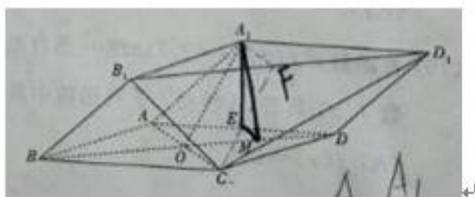
所以 $a = \sqrt{29}$ \leftarrow

(18) (本小题满分 12 分) \leftarrow

由四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后得到的几何体如图所示，四边形 $ABCD$ 为正方形， O 为 AC 与 BD 的交点， E 为 AD 的中点， $A_1E \perp$ 平面 $ABCD$ ， \leftarrow

(I) 证明： $A_1O \parallel$ 平面 B_1CD_1 ； \leftarrow

(II) 设 M 是 OD 的中点，证明：平面 $A_1EM \perp$ 平面 B_1CD_1 。 \leftarrow



【答案】①证明见解析。②证明见解析。 \leftarrow

【解析】

(1) 取 B_1D_1 中点 F ，连接 A_1F, CF ，因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为四棱柱，

所以 $A_1F \parallel OC, A_1F = OC$ ，

所以 A_1FCO 为平行四边形，

所以 $A_1O \parallel CF$ ，又因为 $CF \subset$ 面 B_1CD_1 ，

所以 $A_1O \parallel$ 面 B_1CD_1 ，

(2) E 为 AD 的中点， M 为 OD 中点，

所以 $EM \parallel AO$ ，

因为 $ABCD$ 为正方形，所以 $AO \perp BD$ ，

又因为 $A_1E \perp$ 面 $ABCD$ ，

所以 $A_1E \perp BD$ ， $A_1E \cap EM = E$ ，所以 $BD \perp$ 面 A_1EM ，

所以 $B_1D_1 \subset$ 面 B_1D_1C ， $BD \parallel B_1D_1$ ，

所以 $B_1D_1 \perp$ 面 A_1EM ， $B_1D_1 \subset$ 面 B_1CD_1 ，

所以平面 $A_1EM \perp$ 平面 B_1CD_1 。

(19) (本小题满分 12 分) www.gaosan.com

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，且 $a_1 + a_2 = 6$ ， $a_1 a_2 = a_3$ 。

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) $\{b_n\}$ 为各项非零的等差数列，其前 n 项和为 S_n ，知 $S_{2n-1} = b_n b_{2n-1}$ ，求数列

$\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n 。

【答案】 (1) $a_n = 2^n$; (2) $T_n = 5 - (2n + 5) \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 。

【解析】

(1) 由题意得 $\begin{cases} a_1 + a_1 q = 6 \\ a_1^2 q = a_1 q^2 \end{cases}$ ，所以 $q = -3$ (舍去) 或 $q = 2$ ， $a_1 = 2$ ，

所以数列的通项公式为 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^n$ 。

(2) 由已知 $S_{2n-1} = b_n b_{2n-1} = \frac{(2n+1)(b_1 + b_{2n-1})}{2} = \frac{(2n+1) \cdot 2b_n}{2}$ ，

所以 $b_n = 2n + 1$ ，所以 $\frac{b_n}{a_n} = (2n + 1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ，

所以 $T_n = 3 + [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}] - (2n + 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ，所以 $T_n = 5 - (2n + 5) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 。

(20) (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} a x^2$ ， $a \in R$ ，

(1) 当 $a = 2$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程；

(2) 设函数 $g(x) = f(x) + (x-a)\cos x - \sin x$ ，讨论 $g(x)$ 的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值。

【答案】(1) $3x - y - 9 = 0$ ，(2) 综上所述(1) $a = 0$ 无极值；

(2) $a < 0$ 极大值为 $-\frac{1}{6}a^3 - \sin a$ ，极小值为 $-a$ ；

(3) $a > 0$ 极大值为 $-a$ ，极小值为 $-\frac{1}{6}a^3 - \sin a$ 。

【解析】

(1) 有题意得 $f'(x) = x^2 - 2x$ ，所以 $k = f'(3) = 3$ ，

又因为 $f(3) = 0$ ，其切线方程为 $y - 0 = 3(x - 3)$ ，即 $3x - y - 9 = 0$ ，

(2) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + (x-a)\cos x - \sin x$ ，

则 $g'(x) = x^2 - ax + (x-a)\sin x = (x-a)(x - \sin x)$ ，

令 $g'(x) = 0$ ，得 $x_1 = 0, x_2 = a$ ，

①当 $a = 0$ 时， $g'(x) \geq 0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 R 上递增，无极值；

②当 $a < 0$ 时，令 $g'(x) \geq 0$ ，得 $x < a$ 或 $x > 0$ ，

即 $g(x)$ 在 $(-\infty, a), (0, +\infty)$ 上递增，在 $(a, 0)$ 递减，

所以极大值为 $g(a) = -\frac{1}{6}a^3 - \sin a$ ，极小值为 $g(0) = -a$ ；

③当 $a > 0$ 时， $g(x)$ 在 $(-\infty, 0), (a, +\infty)$ 上递增，在 $(0, a)$ 递减，

所以极大值为 $g(0) = -a$ ，极小值为 $g(a) = -\frac{1}{6}a^3 - \sin a$ ，

综上所述(1) $a = 0$ 无极值；

(2) $a < 0$ 极大值为 $-\frac{1}{6}a^3 - \sin a$ ，极小值为 $-a$ ；

(3) $a > 0$ 极大值为 $-a$ ，极小值为 $-\frac{1}{6}a^3 - \sin a$ 。

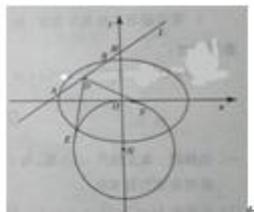
(21) (本小题满分 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，椭圆 C 截直

线 $y=1$ 所得线段的长度为 $2\sqrt{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 动直线 $l: y=kx+m$ ($m \neq 0$) 交椭圆 C 于 A, B 两点, 交 y 轴于点 M, 点 N 是 M 关于 O 的对称点, 圆 N 的半径为 $|MO|$. 设 D 为 AB 的中点, DE, DF 与圆 N 分别相切于点 E, F, 求 $\angle EDF$ 的最小值.



【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. (2) $\angle EDF$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$.



【解析】(1) 因为 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，即 $a = \sqrt{2}b$ ，

又因为令 $y = 1$ ，即 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow a\sqrt{b^2 - 1} = \sqrt{2}b$ ，

解得 $a^2 = 4, b^2 = 2$ ，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。

(2) 由 $M(0, m), N(0, -m)$ ，设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), D(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ ，

又由 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ y = kx + m \end{cases}$ ，解得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kx + 2m^2 - 4 = 0$ ，

所以 $x_1 + x_2 = \frac{-4km}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2m^2 - 4}{2k^2 + 1}$ ，所以 $y_1 + y_2 = kx_1 + m + kx_2 + m = \frac{2m}{2k^2 + 1}$ ，

所以 $D(-\frac{2km}{2k^2 + 1}, \frac{m}{2k^2 + 1})$ ，

所以 $DN = \sqrt{(\frac{m}{2k^2 + 1})^2 + (\frac{m}{2k^2 + 1} + m)^2} = \frac{2|m|}{2k^2 + 1} \sqrt{k^4 + 3k^2 + 2}$ ，

所以 $\sin \angle FDN = \frac{|ON|}{|DN|} = \frac{2k^2 + 1}{2\sqrt{k^4 + k^2 + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2k^2}{(2k^2 + 1)^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{(\sqrt{2k^2} + \frac{1}{\sqrt{2k^2}})^2}}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

当且仅当 $\sqrt{2k^2} = \frac{1}{\sqrt{2k^2}}$ ，即 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，

所以 $\sin \angle FDN$ 得最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\angle EDF$ 得最小值为 $\frac{\pi}{4}$ ，

综上所述 $\angle EDF$ 的最小值为 $\frac{\pi}{4}$ 。